ALGEBRA Y PEDAGOGÍA IGNACIANA

José Ramón Ulloa Herrero

Ciudad de México, 1997

INTRODUCCION.

I. ANTECEDENTES.

El presente libro trata acerca de la enseñanza del Algebra en la Universidad. Quiere ser una respuesta a la invitación hecha a los profesores de las Universidades Jesuitas para aplicar el Paradigma Pedagógico Ignaciano a la enseñanza de sus materias (ICAJE,1995, § 95). Está basado en la convicción de que dicho Paradigma puede inspirar una enseñanza del Algebra rica en sus objetivos y eficiente en sus procedimientos que contribuya a la formación integral del alumno.

En este capítulo introductorio se presenta primero una breve descripción del Paradigma Pedagógico Ignaciano en sí y a continuación una exposición del Paradigma en relación con la enseñanza del Algebra.

En los capítulos posteriores se ilustra cada una de las fases del Paradigma Pedagógico Ignaciano con ejercicios que el maestro del curso de Algebra Superior I puede proponer a sus estudiantes.

Algunos de los ejercicios están diseñados para ser ejecutados en una computadora Macintosh que tenga instalado el programa "Maple V 5.4". Dichos ejercicios no están incluídos en esta versión del texto. Se anexa, en cambio, una versión para "Mathematica 3.0" de algunos de esos ejercicios. El lector interesado en los ejercicios completos puede solicitarlos al autor.

II. EL PARADIGMA PEDAGOGICO IGNACIANO.

1. "La Pedagogía es el camino por el que los profesores acompañan a los alumnos en su crecimiento y desarrollo". (ICAJE,1995,§ 11) La Pedagogía ofrece elementos para entender y realizar mejor la actividad de la enseñanza. Por ello incluye la metodología o didáctica (el cómo enseñar),

pero supone también una visión del mundo y de la persona que queremos contribuir a formar (los fines de la enseñanza).

2. La Universidad Iberoamericana es una de las muchas universidades y colegios fundados por la Compañía de Jesús, la cual tiene una larga y brillante tradición espiritual y pedagógica. La visión del mundo y el ideal de la educación de la Compañía de Jesús para nuestro tiempo están expuestos en el documento "Características de la Educación de la Compañía de Jesús".

De acuerdo con este documento: "La finalidad de la educación de la Compañía de Jesús no ha sido nunca únicamente la adquisición de un conjunto de información y de técnicas o la preparación para una carrera, aunque todas estas cosas sean en sí mismas importantes y útiles para futuros líderes cristianos. El fin último de la educación secundaria de la Compañía es, más bien, el crecimiento completo de la persona, que conduce a la acción, una acción empapada del espíritu y la presencia de Jesucristo, el Hombre para los demás". (CIAE,1987, § 167).

Con el fin de ofrecer orientaciones más específicas para realizar una práctica acorde con las características de la educación jesuítica, se elaboró el documento: "Pedagogía Ignaciana. Un planteamiento práctico"., cuyos lineamientos toman la forma de un modelo o camino para la acción educativa llamado el Paradigma Pedagógico Ignaciano.

3. Tanto el Paradigma Pedagógico Ignaciano como los fines de la educación jesuítica se basan en los "Ejercicios Espirituales" de San Ignacio de Loyola, fundador de la Compañía de Jesús.
Los Ejercicios Espirituales son actividades tales como el examen de conciencia, la meditación y la contemplación mediante las cuales el ejercitante se "pone en condición de hacer una elección significativa para su vida con libertad de corazón y con mentalidad evangélica." (Martini,1995, p.10).
El ejercitante realiza los ejercicios espirituales bajo la guía y el acompañamiento del que da los ejercicios espirituales. Varias de las recomendaciones que hace San Ignacio al que da los ejercicios espirituales así como algunos de los métodos utilizados para realizar los mismos son aplicables a contextos educativos distintos del de los ejercicios y constituyen la base del Paradigma Pedagógico Ignaciano.

4. Es posible encontrar también una correspondencia entre algunas de las etapas propuestas en el Paradigma Pedagógico Ignaciano y las operaciones intencionales y conscientes del ser humano que expuso el filósofo jesuita Bernard J. Lonergan: Experiencia, Comprensión, Reflexión y Decisión. Esta correspondencia es clara en la versión del Paradigma Pedagógico Ignaciano que se encuentra en el documento "Aportes para la implementación de la Pedagogía Ignaciana".

Los "Aportes para la implementación de la Pedagogía Ignaciana" tienen el propósito de adaptar la Pedagogía Ignaciana al contexto latinoamericano. En relación con este contexto, visto desde la óptica de sus implicaciones para la educación universitaria es importante también el documento: "Desafíos de América Latina y Propuestas Educativas de la Asociación de Universidades confiadas a la Compañía de Jesús en América Latina". De acuerdo con este último texto se requiere un "sustancial incremento en las capacidades productivas propias de nuestros países"(AUSJAL, 1995, § 18) y este incremento se logra por el "talento humano expresado en ciencia, tecnología y organización".(AUSJAL,1995, § 19) Uno de los objetivos prioritarios de las universidades latinoamericanas debiera ser la formación de personas con el talento y la voluntad para producir una "vida ciudadana con convivencia de calidad y con los bienes y servicios que necesitamos." (AUSJAL, 1995, § 16).

5. El Paradigma Pedagógico Ignaciano ofrece orientaciones útiles para el proceso de enseñanza-aprendizaje y para la relación profesor-alumno que tienen lugar en el aula. Es un esquema que puede aplicarse en principio a la enseñanza de cualquier materia, un esquema que incluye cinco etapas: contextualizar, experimentar, reflexionar, actuar y evaluar. Describimos a continuación esas cinco etapas apoyándonos en los documentos sobre el Paradigma Pedagógico Ignaciano antes citados:

CONTEXTUALIZAR

6. Contextualizar consiste en pensar la materia y circunstancias del proceso de enseñanza aprendizaje en vistas a su mejor aprovechamiento por parte del estudiante y el bien de la sociedad. Ello corresponde a la recomendación que hace San Ignacio al director de los ejercicios espirituales de estar atento a las características del ejercitante con el fin de seleccionar, modificar o ajustar el contenido y circunstancias de los mismos de tal manera que puedan resultarle más provechosos.

7. Además de esta adaptación de la enseñanza a las características del alumno, la contextualización puede referirse también al "escenario" en el que ocurren las actividades de enseñanza aprendizaje. Tal escenario corresponde a la "composición de lugar" que sirve de preludio a la meditación ignaciana, con el fin de incorporar también la imaginación en la meditación.
En la enseñanza de nuestras materias estos escenarios podrían ser cosas tales como la representación de un tribunal en la enseñanza del Derecho o la simulación del manejo de una empresa en la enseñanza de la Administración. En todo caso, es recomendable que cada clase se inicie con algo que despierte el interés y atraiga la atención y la imaginación de los estudiantes.

EXPERIMENTAR

8. Experimentar algo es percibirlo por medio de los sentidos o recordarlo o imaginarlo y es también la respuesta de naturaleza afectiva que surge a propósito de lo que se percibe, recuerda o imagina.

REFLEXIONAR

9. Reflexionar es la operación por la cual pasamos de lo que se presenta en la experiencia a la comprensión y al juicio. Es lo que distingue el verdadero entender de la mera memorización mecánica (repetir las cosas como perico).
La reflexión comporta dos operaciones relacionadas: *entender*, que es descubrir el significado de la experiencia, conjeturar lo que las cosas son y *juzgar* que es establecer si las cosas son o no son verdaderamente como las hemos conjeturado.

10. Además de experimentar, entender y juzgar, podemos experimentar, entender y juzgar el propio experimentar, entender y juzgar. Este tipo de reflexión es útil para que el estudiante se apropie de sus operaciones cognoscitivas y mejore sus estrategias de aprendizaje y solución de problemas.

ACTUAR

11. Actuar es tomar libremente decisiones y ponerlas en práctica. Mediante la experiencia y la reflexión captamos no sólo hechos sino también posibilidades. Tales posibilidades incluyen la transformación de nosotros mismos y del mundo que nos rodea. Estas posibilidades son objeto de los juicios de valor por los que decimos cosas tales como: esto es bueno, esto debe hacerse, es mejor hacer esto que aquello. Finalmente, por la decisión hacemos que la posibilidad se realice. (Lonergan, citado por Granfield, 1996,p.59).
En la decisión pueden distinguirse dos momentos: la *elección* y la puesta en práctica (*operacionalización)* de la elección.

12. La acción, así entendida, corresponde a la *resolución* que forma parte de la meditación ignaciana. En la meditación ignaciana el ejercicio del entendimiento incluye la comparación de nuestra conducta con la verdad meditada, comparación de la cual pueden deducirse algunos cambios deseables en nuestro comportamiento. A la acción del entendimiento responde la voluntad con afectos (tales como admiración, agradecimiento, vergüenza, gratitud, etc.) y con resoluciones, por las que se asumen y emprenden esos cambios deseables. (Cfr.. Lercaro, 1957, pp.51-53)

EVALUAR

13. Evaluar es revisar el proceso pedagógico seguido "para verificar y ponderar en que medida se ha realizado fiel y eficientemente y por otra parte en que grado se han obtenido los objetivos perseguidos en términos de cambio y transformación".(DEAL, 1995,§ 5.1). Se evalúan tanto resultados como procedimientos.

14. La evaluación corresponde al examen que se realiza después de la meditación. Escribe San Ignacio: "Después de acabado el exercicio; por espacio de un quarto de hora, quier asentado, quier paseándome, miraré como me ha ido en la contemplación o meditación; y si mal, miraré la causa donde procede, y así mirada arrepentirme, para me enmendar adelante, y si bien, dando gracias a Dios nuestro Señor, y haré otra vez de la misma manera". (San Ignacio, Primera Semana, 5a. Adición)

III. EL PARADIGMA PEDAGOGICO IGNACIANO Y LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA UNIVERSITARIA.

Consideraremos ahora cada una de las fases del Paradigma Pedagógico Ignaciano en relación con la enseñanza del Algebra. El propósito es entender lo que significan contextualizar, experimentar, reflexionar, actuar y evaluar en la enseñanza y el aprendizaje del Algebra. Para realizar esta adaptación del Paradigma se han tomado en cuenta, además de los textos sobre pedagogía ignaciana antes citados, las contribuciones de algunos psicologos educativos y autores de textos escolares a la enseñanza de las Matemáticas.

CONTEXTUALIZAR.

1. Contextualizar un curso de Algebra es pensar en vistas del bien del estudiante cosas tales como los objetivos y los temas de la materia, las actividades e instrumentos de la enseñanza y el ambiente del salón de clases. Esto implica que el profesor tome en cuenta a los estudiantes en aspectos tales como sus hábitos de estudio, sus conocimientos y actitudes previas hacia la materia y sus estilos de aprendizaje.

2. ¿Cuál es el objetivo principal de la enseñanza del Algebra? El Algebra es una generalización de la Aritmética que tiene como tarea original la solución de ecuaciones. (Aleksandrov, I, pp. 61-63) El Algebra consta de un conjunto de herramientas para plantear y resolver problemas. Dichas herramientas son cosas tales como las matrices, los determinantes, las transformaciones lineales y los valores y los vectores propios.
El egresado de un buen curso de Algebra deberá poder reconocer los problemas susceptibles de un tratamiento algebraico y valerse de las herramientas algebraicas adecuadas para resolverlos. El alumno enfrentará dichos problemas tanto en otros cursos de su formación universitaria como en su actividad profesional.

La habilidad de plantear y resolver problemas algebraicos requiere que el alumno haya desarrollado estrategias para plantear y resolver problemas pero también que su conocimiento de las herramientas algebraicas se encuentre bien estructurado en la memoria.

3. ¿De qué manera conviene usar las computadoras en la enseñanza del Algebra?
Hay actualmente cursos que están basados totalmente en textos electrónicos interactivos.
De acuerdo con los "Mathematical Archives" de Internet, "Un texto interactivo es un texto elaborado en computadora que le ofrece al lector la posibilidad de usar herramientas simbólicas, numéricas y gráficas. Los resultados del uso de estas herramientas pueden incluirse en el mismo texto de tal manera que cada aprendiz lleve un registro individual de sus propias exploraciones. El primer texto de este tipo es "Calculus & Mathematica" y fue escrito por Brown, Porta y Uhl." Otro texto interactivo es el de Brunson y Ernst. "Algebra, Trigonometry, & Mathematica".
De acuerdo con los autores de estos textos, la computadora le permite al estudiante experimentar todo lo que necesite con gráficas o expresiones para descubrir el concepto, principio o patrón subyacente del cual esas gráficas o expresiones son casos particulares. El gozo del descubrimiento es una motivación poderosa para el aprendizaje.
La computadora le permite también al estudiante liberarse del "yugo" de pesados cálculos manuales y abordar problemas que, aunque importantes, estarían fuera de su alcance sin el cálculo computarizado. A este respecto, Brown, Porta y Uhl citan la frase de A.N.Whitehead: "La civilización avanza extendiendo el número de operaciones importantes que podemos realizar sin pensar en ellas". Algo análogo sugieren psicólogos del aprendizaje: nuestra capacidad de procesar información aumenta en la medida en que automatizamos operaciones y utilizamos modos de representación más sintéticos. (Good y Brophy, pp.181-182).
Sin embargo, la capacidad de realizar cálculos manuales es también un objetivo de la enseñanza de las Matemáticas y en los cursos interactivos se establecen algunas actividades (Literacy Sheets) para que el estudiante se capacite en la realización de cálculos manuales al nivel de "una discusión de amigos en torno a la mesa en un café". (Davis,Porta y Uhl, p.7).

4. De acuerdo con Marzano, un ambiente propicio al aprendizaje en el salón de clases depende no sólo del establecimiento de normas claras y razonables sino también de que el estudiante se sienta aceptado por el profesor y por sus compañeros y de que perciba las tareas que se le asignan como significativas. (Cfr. Marzano, 1992, pp.19-38).
El establecimiento de normas claras, razonables y flexibles es una buena forma de establecer el nivel de calidad de las tareas y las responsabilidades de cada quien. Es también una buena oportunidad para la discusión de valores y actitudes hacia el estudio, la colaboración, las calificaciones y las

tareas. Estas discusiones pueden favorecer el que los estudiantes tomen buenas resoluciones.

5. El respeto, el aprecio y el servicio deben marcar la relación entre el profesor y los alumnos. Se trata de una relación que debe ser siempre respetuosa, animada por la búsqueda del bien del estudiante y que por lo mismo incluye la exigencia y la firmeza mediante las cuales el profesor ayuda al alumno a desarrollar lo más plenamente posible sus capacidades. El profesor que espera mucho de sus alumnos es el que tiene más probabilidades de que sus alumnos logren, en efecto, mucho. El respeto a la dignidad de cada estudiante se manifiesta de muchas maneras, como por ejemplo en que, ante la respuesta incorrecta de un alumno, el profesor destaque los aspectos en los que es acertada o identifique la pregunta que la respuesta incorrecta contestaría. (Ver Marzano, 1992,p.29).

6. El profesor puede también contribuir a favorecer una relación respetuosa entre los alumnos y un espíritu de apoyo mútuo y camaradería mediante medidas tales como promover el aprendizaje cooperativo.
Tanto los autores del texto interactivo que mencionamos antes como numerosos educadores y psicólogos educativos valoran y favorecen el aprendizaje cooperativo (aprendizaje en equipo). Discutir con otras personas el planteamiento y la solución de problemas se asemeja a las condiciones reales del trabajo profesional y es una forma de aprender más. Cuando los profesores participan en estas discusiones su papel no es el de dispensar información o juzgar lo que es correcto sino el de " estimular a los estudiantes a producir, explicar y evaluar posibles soluciones ".(Good y Brophy, 1996,pp.246-247).

7. Que el alumno perciba las actividades de clase como significativas implica que tenga claro lo que debe hacer, que lo que tiene que hacer represente un reto adecuado a su capacidad y que valga la pena.
Si el alumno considera que la tarea que se le presenta es demasiado sencilla perderá el interés por realizarla pero si le parece excesivamente difícil, superior a sus fuerzas, probablemente ni siquiera intentará realizarla. Es por ello conveniente diagnosticar oportunamente las fortalezas y debilidades del alumno con el fin de asignarle tareas adecuadas. Por otra parte, el alumno considerará que lo que tiene que hacer vale la pena si despierta su curiosidad y le permite acceder al gozo de la creación, la comprensión y el descubrimiento o bien si lo encuentra relacionado con la solución de problemas que son importantes para él.
Los autores del texto interactivo antes mencionado consideran que las gráficas interactivas son motivantes para el aprendizaje de la teoría mientras que los problemas realistas resultan motivantes para el aprendizaje de las aplicaciones.

8. Una queja frecuente de los profesores es que muchos de los estudiantes tienen lagunas o errores en sus conocimientos previos. Estos errores no son exclusivos de nuestro medio y han sido objeto incluso de seminarios tales como el "Third International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics".
Jathiratne Ruberu, en una de las ponencias presentada en este seminario estudia algunas de las dificultades que tienen y algunos de los errores que cometen frecuentemente los estudiantes de matemáticas, errores tales como escribir $(a+b)^2=a^2+b^2$ o $p/q+q/p=(p+q)/pq$. En opinión de Ruberu, las acciones remediales no deben tomar la forma de programas separados sino que deben integrarse en los cursos universitarios.

En todo caso, sus conocimientos, experiencias y actitudes previas con respecto a la materia son los elementos con los que cuenta el alumno para interpretar la nueva información que se le proporcione. Es el cimiento sobre el cual se va a construir el curso y es por ello importante revisarlo.

9. En otra ponencia del Seminario antes mencionado, Jonathan Osborne sostiene que dada la variedad de estilos de aprendizaje que tienen los estudiantes, no es recomendable que el profesor utilice sólo una forma de enseñanza (por ejemplo la exposición).
Los estudiantes difieren de muchas maneras. Una de ellas es el modo en el que procesan la información: unos son impulsivos y otros reflexivos. Unos aprenden mejor uniendo las partes para formar el todo mientras que otros prefieren partir de visiones de conjunto, unos tienen un enfoque más operativo y otros más conceptual.
Se ha encontrado que algunos estudiantes de Algebra aprovechan mejor un método de enseñanza que traduce los problemas a términos gráficos mientras que otros alumnos aprovechan mejor la enseñanza a base de manipulaciones puramente simbólicas sin mucha insistencia en su significado lógico. (Cfr. Langford, 1990,pp.154-155).
Por otra parte, hay alumnos muy seguros de sí mismos mientras que otros son exageradamente pesimistas con respecto a sus capacidades y están obsesionados por el temor al fracaso. (Cfr. Osborne, 1993)
En cuanto a su motivación principal, algunos alumnos están movidos por la curiosidad, otros por el deseo de triunfo, otros por el sentido del deber y otros más por el deseo de pertenecer a un grupo e interactuar con otras personas. (Cfr. Osborne, 1993)
Es interesante notar que un sistema de enseñanza tal como el 4MAT de McCarthy que intenta tomar en cuenta los distintos estilos de aprendizaje recomienda pasos similares a los del Paradigma Ignaciano. (Good y Brophy, 1996, p. 457, Orlich, 1994, pp. 414-415).

10. Por lo que se refiere a los "escenarios" que se han construido para ayudar a los estudiantes de Matemáticas a encuadrar las experiencias de aprendizaje en situaciones que puedan ser más significativas y estimulantes

para ellos se encuentra el libro de texto de primaria "Descubriendo las Matemáticas con Nicolás", que relaciona los conceptos y procedimiento elementales de las Matemáticas con situaciones de la vida cotidiana del niño y personajes con los cuales el se puede identificar. Hay también programas de computadora en que los problemas de Algebra ocurren en el contexto de una guerra interplanetaria.
Probablemente en la enseñanza universitaria los elementos apropiados para incorporar la imaginación en el proceso de enseñanza aprendizaje sean las gráficas intrigantes en relación con la teoría y la verosimilitud o realismo en las aplicaciones, como lo enseñan los autores del texto interactivo de Cálculo antes mencionado.

EXPERIMENTAR Y COMPRENDER.

11. De acuerdo con Lonergan, el proceso de entender empieza con algún dato de la experiencia con respecto al cual uno se hace preguntas. La comprensión se da al surgir dentro de uno la respuesta a esas preguntas y, finalmente, la comprensión se manifiesta en una expresión que puede servir para facilitar la comprensión a otros.
(Lonergan 1980, pp. 40--55, Lonergan 1957,pp.272-274).

En efecto, leemos el enunciado de un problema o la demostración de un teorema, observamos una gráfica o la aplicación de un procedimiento y, al hacerlo, sentimos también curiosidad, entusiasmo, desazón o temor, sentimientos que nos ayudan o nos dificultan la tarea de entender. Nos hacemos preguntas para entender el problema, la demostración, la gráfica o el procedimiento y, a veces, tenemos que darle muchas vueltas al asunto y "rompernos la cabeza" antes de que se produzca el "chispazo inteligente", la idea brillante, la intuición, la corazonada que nos hace exclamar "!ya entiendo!" . Pasamos entonces a tratar de escribir, explicar o aplicar lo que hemos entendido. Hacerlo no siempre es fácil, pero es lo que nos da la seguridad de que verdaderamente hemos entendido.

El papel del maestro para facilitar la experimentación y la comprensión consistirá entonces en proponer al alumno los datos suficientes de la experiencia (o bien ayudarlo a encontrarlos o a recordarlos) , en promover las preguntas e imágenes pertinentes con respecto a esos datos que lleven a su comprensión y, una vez lograda ésta, en requerir al estudiante la formulación y el uso de la comprensión.

Lo que hay que entender en Algebra son conceptos, procedimientos, teoremas y problemas.

12. En cuanto a la comprensión de conceptos y procedimientos varios autores preocupados por el aprendizaje significativo han señalado la importancia de vincular los conceptos nuevos con los que ya son familiares

para el alumno. (Good y Brophy, pp. 159-160) Entre las estrategias para lograrlo mencionan cosas tales hacer una introducción previa al tema en lenguaje familiar para el alumno y el uso de analogías, metáforas, modelos y ejemplos concretos. Es recomendable también, al introducir un nuevo tema, que los alumnos reúnan recuerden y expresen los contenidos de su propia experiencia relacionados con dicho tema. Hay también una relación entre la práctica y la comprensión de operaciones y procedimientos.

13. En cuanto a la comprensión de las proposiciones llamadas teoremas, tradicionalmente se han distinguido dos grandes enfoques complementarios: Uno es partir del enunciado del teorema y a continuación ofrecer ejemplos y contraejemplos o casos particulares que lo ilustren.
El otro enfoque es inverso: partir de ejemplos o casos particulares para inducir de ellos el teorema. (S. Tomás de Aquino, S.Th., I, 117).

Si se espera que el alumno , después de revisar los ejemplos, encuentre por si mismo el teorema, solemos hablar de aprendizaje por descubrimiento. A veces el razonamiento por analogía o la búsqueda de la razón de ser de un hecho pueden llevar también al descubrimiento de teoremas.

14. Cuando el alumno por si mismo encuentre un teorema a partir de ejemplos, seguramente lo percibirá como una conjetura. Sentirá la necesidad de asegurarse de su verdad y de explicar su razón de ser. Ello lo conducirá naturalmente a la demostración de la proposición o teorema. Dicha demostración puede a su vez ser explicada por el profesor o bien descubierta por el propio alumno sirviéndose, si es necesario, de pistas oportunas que le brinde el profesor.

15. La Pedagogía Ignaciana recomienda ofrecer oportunidades al alumno para el descubrimiento y la creatividad personal, como lo sugiere la siguiente anotación de San Ignacio "la persona que da a otro modo y orden para meditar y contemplar, debe narrar fielmente la historia de la tal contemplación o meditación, discurriendo solamente por los punctos con breve o sumaria declaración, porque la persona que contempla, tomando el fundamento verdadero de la historia discurriendo y raciocinando por si mismo y hallando alguna cosa que haga un poco más declarar o sentir la historia, quier por la raciocinación propia, quier sea en quanto el entendimiento es ilucidado por la virtud divina, que es de más gusto y fructo espiritual, que si el que da los exercicios hubiese mucho declarado y ampliado el sentido de la historia, porque no el mucho saber harta y satisface al ánima, mas el sentir y gustar de las cosas internamente".(San Ignacio, Anotación 2).

16. Por lo que se refiere a la comprensión en la solución de problemas hay que distinguir la representación del problema y las estrategias de solución

del problema. Por ejemplo, Resnick y Ford afirman que para resolver un problema como el siguiente:
"*Sara es 6 centímetros más alta que Daniel, y éste es un centímetro más bajo que José. Sabiendo que José mide un metro y medio, ¿Cuánto mide Sara?.*"
Los alumnos pueden utilizar tres formas de representación: la lingüística informal, la física visual y la algebraica. (Resnick y Ford, 1990, pp. 254-257).

17. De acuerdo con las mismas autoras, una vez representado el problema, la probabilidad de que se lleve a cabo una solución correcta del mismo depende de si la persona que lo resuelve posee en la memoria un conjunto adecuado de procedimientos que se ajusten al problema tal como se presenta. En los problemas rutinarios, o problemas del mismo tipo que los que ya ha resuelto el estudiante, una vez efectuada la representación, falta sólo asegurarse de que los procedimientos inspirados por la representación son de hechos aplicables al problema y limitarse a aplicar dichos procedimientos. Pero en el caso de otros problemas, la persona advierte que los procedimientos que conoce no son pertinentes a la situación. Puede entonces utilizar una serie de estrategias como las que recomienda G. Polya en su libro "Cómo plantear y resolver problemas".

Investigaciones recientes sugieren que tanto para la comprensión de conceptos como para la solución de problemas no rutinarios es importante contar con diferentes representaciones de un concepto y poderlas articular sin contradicción. (Hitt, 1997).

REFLEXIONAR.

18. Mediante la experiencia captamos los datos, mediante la comprensión los entendemos y mediante la reflexión juzgamos si aquello que hemos entendido es verdadero o es falso.
Mediante la experiencia nos familiarizamos con los objetos de las Matemáticas, mediante la comprensión hacemos conjeturas acerca de las relaciones entre esos objetos y mediante la reflexión juzgamos si esas conjeturas corresponden o no a la realidad.
Así entendida, la reflexión se vincula en Matemáticas principalmente con la demostración.
La finalidad de la demostración es establecer la verdad o falsedad de las afirmaciones sobre los objetos de las Matemáticas, principalmente de las afirmaciones llamadas teoremas.
Sin los teoremas y su demostración, los hechos de las Matemáticas nos parecerían inconexos y casuales.
Compete también a la reflexión revisar las operaciones del sujeto que conducen a la afirmación de lo verdadero, es decir las operaciones de experimentar, entender y juzgar.
La reflexión encuentra un apoyo natural en el diálogo.

ACTUAR.

19. Además de la reflexión mediante la cual juzgamos si aquello que hemos entendido es verdadero o es falso, existe la reflexión por la cual juzgamos acerca de lo que queremos hacer: es la reflexión práctica, mediante la cual deliberamos sobre nuestras posibles acciones antes de tomar una decisión.
Por la decisión hacemos que empiece a existir lo que antes no era, por la decisión nos transformamos a nosotros mismos y al mundo que nos rodea.
Nos transformamos a nosotros mismos juzgando nuestro querer y nuestro comportamiento y cambiándolos.
Transformamos el mundo físico y social que nos rodea de diferentes maneras y podemos hacerlo así mejor, o más útil o más bello.
Cuando queremos lo bueno nos ennoblecemos, de lo contrario, nos envilecemos.

20. El Algebra contribuye a la acción en la medida en que es un instrumento para la comprensión de las posibilidades de transformación de nosotros mismos y del mundo que nos rodea, en que ofrece elementos para la formulación del juicio de valor sobre esas posibilidades y en que ofrece elementos para realizar la solución elegida.
Platón pronunció una conferencia sobre el Bien que intrigó a sus contemporáneos porque asociaba el Bien con una visión matemática del mundo. Comentando acerca de esa conferencia escribió A. N. Whitehead: "La noción de la importancia de la forma (pattern) es tan vieja como la civilización. Cada una de las artes está fundada sobre el estudio de la forma La cohesión de los sistemas sociales depende del mantenimiento de formas de conducta y el avance en la civilización depende de la modificación afortunada de alguno de esas formas o patrones de conducta. Así, la introducción de formas en las ocurrencias naturales, la estabilidad de dichas formas y la modificación de dichas formas es la condición necesaria para la realización del Bien. La Matemática es la técnica más poderosa para entender las formas y para analizar la relación entre las formas." (Citado por Steen, 1980, p.31).

21. Actuar, en Algebra, es aplicarla a la comprensión y la solución de problemas ingenieriles, económicos, sociales, de salud, políticos y otros. La formulación del problema requiere generalmente un enfoque interdisciplinario, generar las posibles soluciones demanda creatividad, hacer el juicio de valor sobre las posibles soluciones implica considerar criterios no sólo lógicos y matemáticos, sino también éticos. La puesta en práctica de la solución exige frecuentemente habilidades tales como la capacidad de comunicar y convencer.

22. Actuar, en Algebra, es también un crecimiento personal en la adhesión a los valores propios de las Matemáticas, valores tales como la "belleza" de

una teoría o la "elegancia" de una demostración. En estos valores se apoyan también decisiones tales como dedicar tiempo a simplificar los pasos de un programa de computadora, o a formular con mayor precisión una definición o buscar la explicación de un dato intrigante.

23. Escribió el matemático francés H. Poincaré: "el sabio digno de ese nombre, el geómetra sobre todo, experimenta delante de sus obras la misma impresión que el artista: su gozo es igualmente grande y de la misma naturaleza...si nosotros trabajamos no es tanto para obtener esos resultados positivos en los que el vulgo cree que está nuestro único interés, sino para volver a sentir esa emoción estética y comunicarla a los que son capaces de experimentarla" (Citado por Sortais, 1922, I, § 61).

24. Actuar, en Algebra, es también comunicarla, especialmente prestando el servicio de la enseñanza. La enseñanza implica reflexiones acerca del beneficio que les aporta a las personas el aprendizaje de las matemáticas y decisiones acerca de lo que es mejor para su formación. Un elemento siempre importante en la comunicación es la honradez intelectual.

25. Actuar, en Algebra, es también que el estudiante juzgue y en su caso modifique su modo de comportarse en el desarrollo de las tareas (aprecio del trabajo bien hecho, limpieza, orden, honradez), en la colaboración con sus compañeros, en el tiempo dedicado al estudio, en la actitud ante las calificaciones, etc. El punto de partida para estas resoluciones puede ser la evaluación de resultados y procedimientos.

Queremos que nuestro alumnos actúen conforme a una visión cristiana de la vida, sin embargo deben evitarse la manipulación y el adoctrinamiento.. Así como en la fase de la reflexión pide San Ignacio a quien da los ejercicios espirituales que deje más bien al ejercitante encontrar las cosas mediante su propio razonamiento, así con respecto a la decisión le solicita que no presione al ejercitante a tener más un modo de vivir que otro sino dejar "que el mismo Criador y Señor se comunique a la su ánima devota abrazándola en su amor y alabanza disponiéndola por la vía que mejor podrá servirle adelante". (San Ignacio, Anotación 15)

EVALUAR.

26. Evaluar el aprendizaje del alumno es juzgar dicho aprendizaje con base en evidencias y conforme a ciertos criterios. Este juicio lo realizan tanto el profesor como los alumnos (autoevaluación).
Al inicio del curso o de algunos temas, es conveniente revisar si los alumnos tienen, y en qué medida, los conocimientos y habilidades que suponemos se requieren para el estudio provechoso del nuevo material. Este tipo de evaluación es un diagnóstico que debemos tomar en cuenta para contextualizar la enseñanza.

Durante el curso y el desarrollo de los temas, el alumno necesita recibir retroalimentación oportuna acerca del valor de lo que está haciendo para, en su caso, rectificar el rumbo. Este tipo de evaluación se llama formativa y conviene que incluya tanto la revisión del aspecto propiamente matemático como algunos del comportamiento del alumno.
Este tipo de evaluación se relaciona con uno de los objetivos del aprendizaje de las Matemáticas que es que el alumno se acostumbre a revisar los procedimientos y resultados de su trabajo.
Finalmente, al concluir el curso o varios temas, se juzga qué tanto el alumno ha logrado los objetivos propuestos para ese curso o temas Esto se realiza por medio de la evaluación terminal.
No todos los aspectos de la evaluación deben considerarse para la acreditación o calificación de la materia.

IV. EL PARADIGMA EN MOVIMIENTO.

Para ejemplificar como se relacionan entre sí las distintas fases del Paradigma Pedagógico Ignaciano en la enseñanza del Algebra consideraremos elementos de una lección imaginaria sobre el tema de los determinantes:

1. El profesor propone a los alumnos el siguiente problema:

"*A medida que el orden de las matrices aumenta, aumenta también el número de operaciones que se requieren para calcular sus determinantes. Para facilitar esa tarea son importantes algunas propiedades de los determinantes como la que encontraremos a continuación:*

Calcule los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Qué es lo que observa al comparar los determinantes obtenidos y los renglones de las matrices?.
Sin efectuar el cálculo diga cuál es el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Haga ahora el cálculo. ¿ fue acertada su predicción?.

2. En cuanto al **contexto**: este problema resultará prácticamente incomprensible para aquellos lectores que no conozcan o recuerden los términos y símbolos empleados, en cambio, debe parecer relativamente sencillo al alumno que ha estudiado previamente la definición de determinante y ha calculado antes determinantes como los que aparecen en el problema.

3. En cuanto a la **experiencia** y la **comprensión**: la experiencia en este caso consiste en calcular y comparar expresiones, pero se trata de una experiencia guiada por el deseo de entender lo que se indica en las preguntas. Lo que se pretende ayudarle al alumno a captar es el patrón o forma que relaciona el valor del determinante con el orden de los renglones de la matriz. Ese patrón o forma al que apuntan las preguntas planteadas se puede expresar así: "cuando se intercambian dos renglones de una matriz, el valor de su determinante cambia de signo".

4. Una vez que los alumnos han logrado la comprensión deseada, el profesor les plantea un nuevo problema:

"*Han encontrado que cuando se intercambian dos renglones cualesquiera de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

su determinante cambia de signo. ¿Será esto una casualidad debida a los números que tiene este determinante?. Calculen el valor de algunos determinantes distintos para aclarar esta duda.
Ninguno de los alumnos del salón ha podido encontrar un sólo caso en el que la afirmación sea falsa, tenemos entonces motivos para suponer que es una afirmación verdadera para cualquier determinante.
Para empezar, ¿Cómo nos aseguramos de que la afirmación es verdadera para cualesquiera matrices de orden dos?.

Las preguntas de este ejercicio invitan al alumno a pasar de la comprensión a la **reflexión**. La comprensión le permitió al alumno formular como conjetura el teorema: "Si A y B son dos matrices de orden n y B se obtiene de A intercambiando dos renglones, entonces det B = -det A". Las preguntas para la reflexión deberán conducir al alumno a encontrar una demostración de este teorema y asegurarse así de la verdad del mismo..

5. Una vez demostrado el teorema, el profesor propone otras preguntas:

" *Algunos alumnos han calculado los determinantes anteriores a mano y otros han utilizado una calculadora. ¿Cuál de los dos procedimientos es mejor?, ¿Porqué?".*

Se está ahora invitando a los estudiantes a hacer un **juicio de valor** sobre lo que están haciendo con base en criterios explícitos. Se espera que los estudiantes digan cosas como las siguientes: "El uso de la calculadora es mejor desde el punto de vista de que toma menos tiempo, comete uno menos errores y puede uno enfocar más su atención a tratar de entender. En cambio, el cálculo manual nos dio mejores pistas para la demostración del teorema" y pueden también añadir: "El conocimiento de la propiedad que se ha demostrado puede ahorrarnos tiempo y esfuerzo, ya que si encontramos dos matrices iguales, salvo por el orden en el que aparecen sus renglones, sólo tendríamos que calcular el determinante de una de ellas".

6. Esta reflexión valoral puede servirle de base al alumno para deliberar: "¿Qué sentido tiene que yo haga lo que puede hacer una calculadora?" y tomar una **decisión** como la siguiente "en la realización de mis estudios trataré de valerme del cálculo manual únicamente cuanto sea necesario para entender mejor lo que estoy haciendo". Este es ya el campo de la **acción**.

Otro alumno puede preguntarse ¿y además de servir para resolver sistemas de ecuaciones lineales, que otro uso tienen los determinantes?. El maestro le indica que una pista a explorar es la aplicación de los determinantes a la geometría. El alumno en cuestión y otros interesados podrían **decidirse** a investigar esas aplicaciones y exponer después sus resultados al grupo.

7. La **evaluación** de los resultados de este proceso debe ser congruente con los objetivos para lograr los cuales se diseño la experiencia: que el alumno sea capaz de enunciar las propiedades de los determinantes, que sea capaz de demostrarlas y que sea capaz de utilizarlas para el cálculo de determinantes. Estos **resultados** se pueden evaluar mediante un examen con preguntas como las siguientes:

1. La matriz B se obtuvo de la matriz A mediante el intercambio de dos renglones. El determinante de la matriz A es -23. ¿Cuál es el determinante de la matriz B?.

2. Demuestre que si A es una matriz de orden dos y B es la matriz transpuesta de A, entonces det A = det B

3. Describa el que procedimiento más eficiente que podría utilizar para calcular el valor de A. Encuentre el valor de A:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Al entregar los resultados del examen y aclarar las dudas que nunca faltan el profesor invitó a los alumnos a pensar sobre los resultados buenos o malos que cada quien hubiera obtenido y a reflexionar sobre las causas de los mismos.
Conforme a las normas establecidas al principio del curso, el profesor dió a los alumnos que no tuvieron buena calificación en el examen la opción de presentar un nuevo examen con la condición de asistir a asesoría y realizar, en su caso, las lecturas y ejercicios que les asigne como preparación para ese examen.

8. La evaluación del **proceso**:

El profesor se preocupó por verificar si sus alumnos tenían algunos conocimientos que el juzgaba necesarios para iniciar el estudio de los determinantes. Por eso, antes de abordar el tema les hizo las siguientes preguntas:

Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Encuentre el determinante de A
2. Encuentre el determinante de B
3. ¿Qué diferencia hay entre la matriz A y el determinante de la matriz A?

Ello le permitió averiguar que algunos alumnos no habían estudiado el tema en la enseñanza media superior mientras que otros decían que era demasiado sencillo pues estaban repitiendo la materia. Organizó entonces a los alumnos en pequeños grupos de manera que quienes ya sabían les explicaran a quienes no sabían.
A lo largo del desarrollo del tema, el profesor ofreció oportunamente retroalimentación a los estudiantes. Observó, por ejemplo, que muchos alumnos resolvían los determinantes de 3 x 3 utilizando la regla de Sarrrus, lo cual es correcto. Pero observó también que algunos cometían el error de

aplicar dicha regla sin más al cálculo de los determinantes de 4 x 4. Para corregir esa falla, planteó a los alumnos el siguiente ejercicio:

Encuentre el determinante de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a)-Utilizando la "regla de Sarrus".
b)-Utilizando la definición de determinante.
c)-¿Que conclusión saca al comparar los resultados anteriores?

Al terminar la unidad el profesor invitó a cada uno de los alumnos a responder por escrito las siguientes preguntas sobre si mismo en relación con el tema:

¿Qué fue lo que más le gustó? ¿porqué?
¿Es algo importante para usted? ¿Porqué?
¿Que le pareció difícil en un principio y luego pudo entender bien? ¿Qué le ayudó?
¿Que puede mejorar en su estudio fuera de clase?
¿Puede hacer algo para mejorar el ambiente en el salón de clases?
¿Tiene alguna recomendación o petición para el profesor?
En esta parte del curso aprendió...

V. ALGEBRA Y PEDAGOGIA IGNACIANA.

Las afirmaciones con las que concluye este capítulo son una breve reflexión sobre la relación entre la enseñanza del Algebra y la labor educativa de una Universidad inspirada en el Paradigma Pedagógico Ignaciano:

I. De acuerdo con lo dicho anteriormente, la pedagogía de los Ejercicios Espirituales es el modo propio de San Ignacio de ayudar a otra persona a ponerse "en condición de hacer una elección significativa para su vida con libertad de corazón y con mentalidad evangélica." (Martini,1995, p.10).
Se puede afirmar entonces que la pedagogía propia de los Ejercicios Espirituales de San Ignacio es una pedagogía de la elección.

2. Elementos característicos de dicha pedagogía son el énfasis que da a la actividad por la que el ejercitante descubre las cosas por sí mismo

y el respeto a la persona en su movimiento interno de toma de decisiones.

3. Podemos concebir también la labor educativa que hacemos en la Universidad en relación con la elección. Se trata de formar personas que tomen decisiones en el contexto mexicano con criterios evangélicos -tales como el servicio al prójimo, particularmente el que más lo necesita- y que dichas decisiones sean competentes desde el punto de vista profesional.

4. Cualquier curso del plan de estudios puede contribuir a ese propósito formativo no sólo por su contenido sino también por un método de enseñanza que, en un clima de libertad, favorezca deliberadamente la experimentación, la comprensión, la reflexión y la acción, entendida esta última como un proceso de valoración para la toma de decisiones. (Ver Delgado, 1995).

5. En especial, el estudio del Algebra puede ayudarle al estudiante a desarrollar "hábitos de precisión, claridad y rigor" (Herschel, citado por Sortais, 640) al mismo tiempo que le ofrece instrumentos útiles para entender la realidad e imaginar y valorar sus posibilidades de transformación.

I. EJERCICIOS DE CONTEXTUALIZACION.

INTRODUCCION

Los ejercicios de contextualización tienen la finalidad principal de ayudar al profesor y a los estudiantes a establecer desde el inicio del curso las condiciones grupales y personales más favorables para el proceso de enseñanza y aprendizaje. De acuerdo con Marzano esas condiciones consisten en que cada estudiante se sienta aceptado por el profesor y por sus compañeros, en que perciba las tareas que se le proponen como realizables y significativas y en que considere claras y razonables las "reglas del juego" o normas que regulan la conducta en clase y la calificación de las actividades académicas. (Cfr. Marzano, 1992, pp.19-38).
El profesor puede contribuir a establecer estas condiciones favorables mediante actividades que:

a)-Favorezcan el conocimiento y la aceptación mútua de los integrantes del grupo.
b)-Le ofrezcan al estudiante elementos para mejorar sus actividades de estudio dentro y fuera de clase.

c)-Le permitan al alumno detectar oportunamente deficiencias en sus conocimientos previos y remediarlas.
d)-Ayuden al alumno a percibir la importancia de los objetivos del curso y la relación que tienen con su propio proyecto de vida.
e)-Ayuden al alumno a reflexionar sobre el papel del profesor y el suyo propio y a asumir las consecuencias de sus actos.

Tales actividades son los ejercicios para la contextualización del aprendizaje, de los cuales presentamos en la siguiente sección algunos ejemplos.
Las actividades de contextualización son particularmente provechosas para los alumnos que cursan Algebra ya que la mayor parte de ellos están iniciando sus estudios en la Universidad.

EJERCICIOS PARA LA CONTEXTUALIZACION DEL APRENDIZAJE.

1. Ejercicio de presentación del profesor y los alumnos.

La finalidad de este ejercicio es ayudar al profesor a conocer mejor a sus estudiantes y dirigir su atención hacia ellos. Le indica también al estudiante que el profesor se interesa por él como persona.

Desarrollo: después de que el profesor da la bienvenida a los alumnos y se presenta a si mismo, invita a los estudiantes a responder individualmente por escrito el siguiente cuestionario:

1. Nombre. 2. Carrera. 3. ¿porqué elegiste esa carrera?. 4. ¿Qué otras materias cursas en este semestre?. 5. ¿Te gustan las matemáticas? 6. ¿Que te gusta de las matemáticas? 5. ¿Cuáles son tus actividades preferidas?. 6. Escuela de la que procedes . 7. Algo que hayas logrado y de lo que estés orgulloso.

Solicita después que cada estudiante haga una breve presentación ante el grupo diciendo su nombre y alguna de sus actividades preferidas.

Después de las presentaciones, el profesor conservará los cuestionarios y hará comentarios estimulantes sobre las respuestas en la siguiente clase.

2. Ejercicio sobre antecedentes de la materia.

La finalidad de este ejercicio es ayudar al estudiante a repasar algunos conocimientos requeridos para el curso y, en su caso, remediar las deficiencias detectadas.

Desarrollo: Se explica a los alumnos la finalidad del ejercicio y se les invita a responder individualmente el siguiente cuestionario:

1. Resuelva la ecuación: $2x + 4 = 0$

2. Resuelva la ecuación: $x^2 + 5x + 6 = 0$

3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 6x - y &= 3 \end{aligned}$$

4. ¿Cuales de los siguientes puntos pertenecen a la gráfica de la función $y = 2x - 1$?

   a)- (2, 3)
   b)- (2, -1)
   c)- (1, -2)
   d)- (0, -1)

5. Tres vértices de un rectángulo están en los puntos (2,1), (7, 1) y (7,4). ¿En qué punto se encuentra el cuarto vértice?.

6. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,1) y (3,2).

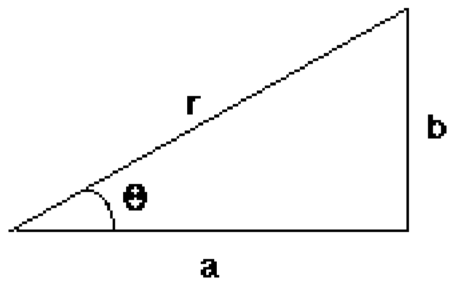
7. Encuentre el punto en el que se encuentran las rectas cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

8. ¿En qué punto corta la recta $y = 3x - 2$ el eje de las X ?

9. Una persona tiene 200,000 pesos en el banco, parte a un interés del 25% anual y parte a un interés del 20% anual. ¿Qué cantidad tiene ahorrada al 25% si obtiene en total 44,000 pesos anuales por concepto de intereses?.

10. En el triángulo:



a)- tan θ = b)- sen θ = c)- cos θ =

11. Dibuje un triángulo rectángulo que sea isósceles. ¿Cuál es el coseno de uno de sus dos ángulos iguales?, ¿y la tangente?.

12. Si tan **b =** $\frac{1}{2}$ entonces cos **b =**

13. Resuelva la ecuación: $y^4 + 5y^2 + 6 = 0$

14. Grafique los puntos para los cuales la desigualdad $x + 2y = 5$ es verdadera.

Una vez resuelto, se reunirán en grupos de tres estudiantes para revisar las respuestas.

Terminado el tiempo para el trabajo en grupos un representante de cada grupo resolverá un problema en el pizarrón.

Un miembro del grupo entregará al profesor una hoja con los nombres de los integrantes del grupo y uno de los errores detectados. El profesor puede iniciar la clase siguiente invitando a los alumnos a hacer una reflexión sobre los errores detectados y cómo evitarlos.

Pide a los alumnos que inicien un portafolios en el que conserven su examen con los errores detectados y la corrección de los mismos.

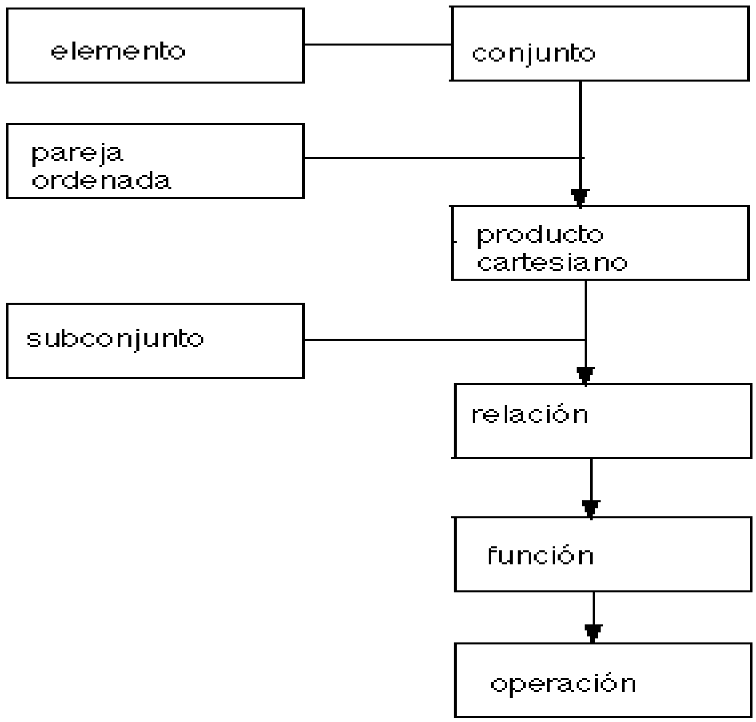
3. Ejercicio sobre antecedentes del primer tema.

La finalidad de este ejercicio es ayudar a los estudiantes a recordar lo que ya saben sobre un tema y a formularse preguntas que motiven y orienten el estudio de la nueva información que se les proporcionará sobre dicho tema.

Desarrollo: el profesor anuncia que se van a estudiar los conceptos de conjunto, relación, función y operación. Explica que tanto en la parte teórica como en las aplicaciones del curso se trabajará constantemente con ejemplos de los conceptos de conjunto, producto cartesiano, relación función y operación. El propósito de estudiar este tema es ver como a partir del de conjunto se definen los demás conceptos mencionados.

Por medio de preguntas solicita a los estudiantes decir lo que ya saben sobre estos conceptos (v.gr.; ¿Qué es un conjunto?, ¿Qué ejemplos de conjunto podemos dar?, ¿Cómo definimos un conjunto?, ¿Cómo indicamos que un elemento pertenece a un conjunto?, ¿Qué es un subconjunto?, ¿Qué operaciones entre conjuntos conocemos?, ¿Cómo denotamos cada una de esas operaciones?, ¿qué ejemplos de función podemos dar?, ¿Qué es una relación?, ¿Qué ejemplos de relación podemos dar?, ¿qué es una función?, ¿es diferente una función de una relación?, ¿Qué ejemplos de función podemos dar?, ¿Qué tipos de funciones hay?, ¿Podemos dar un ejemplo de una función que sea sobreyectiva y no inyectiva?, ¿Podemos considerar que algo como la suma o la multiplicación de números naturales es una función?, ¿porqué?.).

El profesor escribe en el pizarrón todas las aportaciones de los estudiantes. Ni el profesor ni los compañeros juzgan las aportaciones aunque pueden pedir aclaraciones sobre ellas.
Las aportaciones se pueden organizar de acuerdo con el siguiente esquema que el profesor propone previamente:



Al terminar, el profesor invita a los alumnos a expresar las dudas que se les han presentado. Estas dudas pueden ser el punto de partida de la exposición del profesor y/o del estudio individual de los alumnos sobre el tema.

4. Ejercicio sobre objetivos de la materia.

La finalidad de este ejercicio es ayudar al estudiante a tener una idea más clara de la naturaleza e importancia del objetivo principal del curso.

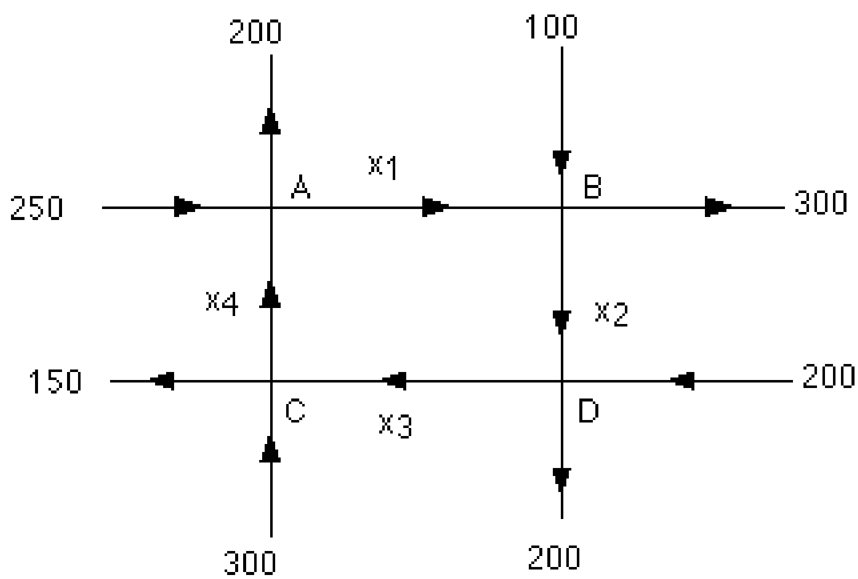
Desarrollo: el profesor propone a los alumnos tres problemas de diferente tipo que conduzcan al planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales. Generalmente los problemas que aparecen en los textos son de dos clases: unos se refieren a redes tales como circuitos eléctricos, tuberías o circulación de vehículos en las calles y otros se refieren a mezclas tales como la formación de una cartera de inversiones o la cantidad de ciertos ingredientes que debe tener un producto para satisfacer los requisitos dados. Pueden utilizarse los siguientes tres problemas:

1. Un ganadero quiere dar a sus animales un alimento que tenga los nutrientes A, B y C en las proporciones 1/2, 1/3 y 1/6 respectivamente. En el mercado puede adquirir el alimento X, que tiene los nutrientes A, B y C en las proporciones 3/5, 2/10 y 2/10 respectivamente, el alimento Y, que tiene los nutrientes A, B y C en las proporciones 3/8, 1/2 y 1/8 respectivamente y el alimento Z que tiene los nutrientes A, B y C en las proporciones 4/9, 1/3 y 2/9 respectivamente. ¿Qué cantidad de X, Y y Z debe mezclar para elaborar 20 toneladas de alimento que tengan los nutrientes A, B y C en las proporciones deseadas?.

2. El esquema de abajo representa el cruce de cuatro calles de un sólo sentido en el centro de una ciudad. Los números y las letras corresponden a la cantidad de vehículos por hora que circulan por cada parte de las calles. Se da por supuesto que el número de vehículos que entran a un crucero es igual al que sale de él. Si durante la mañana circulan por el tramo x_4 200 vehículos por hora y por la tarde un 10% menos, diga

a)- cuántos automóviles circulan por hora en los tramos x_1, x_2 y x_4 durante la mañana.

b)- cuántos automóviles circulan por hora en los tramos x_1, x_2 y x_4 durante la tarde.



3. En una dependencia gubernamental hay dos oficinas A y B, que funcionan 80 y 100 horas a la semana respectivamente. Estas oficinas atienden tres tipos de trámites: X, Y y Z. Cada trámite del tipo X toma 1 hora en la oficina A y 2 horas en la oficina B. Cada trámite del tipo Y toma 2 horas en la oficina A y 1 hora en la oficina B. Cada trámite del tipo Z toma 1/4 hora en la oficina A y 1/2 hora en la oficina B. ¿Cuántas

trámites de cada tipo deben realizarse semanalmente para lograr la máxima ocupación de las dos oficinas?.

Se asigna a cada alumno uno de los tres problemas para resolverlo individualmente y después los alumnos se reúnen en grupos de tres, en los que cada quien ha resuelto un problema diferente. Una vez que se ponen de acuerdo en que la solución dada a cada problema es correcta el profesor les pide reflexionar sobre los siguientes puntos:
¿Qué dudas surgieron sobre el planteamiento y solución de estos problemas?
¿Qué tienen en común y que tienen de diferente estos tres problemas?

Cada equipo da a conocer sus reflexiones al resto del grupo y el profesor aprovecha para señalar lo siguiente:

Uno de los objetivos de nuestro curso es que ustedes puedan plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales que surjan al modelar una situación real concreta.
En los problemas que acaban ustedes de resolver, el enunciado corresponde a "una situación real concreta", y el sistema de ecuaciones lineales con el que plantearon ustedes el problema es "el modelo matemático de la situación". El estudio de estos sistemas y los métodos de solución de los mismos es el objeto de la teoría. De hecho, corresponde a la teoría despejar varias de las dudas que han planteado ustedes.
Uno de los objetivos de la carrera que estudian es que los problemas típicos de su profesión y los modelos que ayudan a su solución les resulten familiares.
Hay que observar, sin embargo, que los problemas a los que se enfrenta un profesionista cambian con el tiempo. Los problemas que se pueden representar por medio de sistemas de ecuaciones lineales tal vez no serán los mismos hoy y mañana ni serán los mismos en una empresa que en otra, mientras que la teoría es permanente.

5. Ejercicio sobre el sistema de estudio.

La finalidad de este ejercicio es ayudar al estudiante a mejorar su sistema de estudio fuera de clase.

Desarrollo: El profesor explica que las tres preguntas básicas que los alumnos deben poder responder con respecto a cualquier sistema de ecuaciones lineales que se les presente son:

1. ¿Tiene o no solución?
2. ¿Cuántas soluciones tiene?
3. ¿Cómo encontrar la solución?

Para empezar, buscarán la respuesta a estas preguntas en el caso de un sistema cualquiera de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2$$

Estudiarán para ello tanto la teoría como los problemas de alguno de los libros de texto mencionados en la bibliografía. Como resultado del estudio deberán poder responder a las tres preguntas y dar la razón de ser de su respuesta; recomienda a los alumnos fijarse en que estas ecuaciones representan lineas rectas.

El profesor anuncia que habrá un examen al respecto y ofrece a los estudiantes brindarles la asesoría que requieran en el horario previamente establecido.

En la siguiente clase, el profesor aplica un examen con las siguientes preguntas:

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2$$

1. ¿Qué se necesita para que este sistema tenga una y sólo una solución?
2. ¿En qué caso este sistema no tiene solución?.
3. ¿Puede este sistema tener sólo dos soluciones distintas?.

4. Diga cuántas soluciones tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x - 3y = 7$$
$$3x - 2y = 18$$

y en qué se basa para dar su respuesta.

5. Encuentre cinco soluciones del sistema:

$$5x + 2y = 10$$
$$15x + 6y = 30$$

6. Diga si el siguiente sistema de ecuaciones tiene o no solución y porqué:

$$x - 4y = 2$$
$$2x - 8y = 5$$

7. En el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5x + 3y = 1$$
$$ax + 6y = 2$$

¿Cuánto debe valer a para que el sistema tenga muchas soluciones?

8. En el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5x + ay = b$$
$$3x + 6y = 2$$

Encuentre un valor de a para que el sistema tenga sólo una solución.

9. ¿Puede el siguiente sistema no tener solución? ¿porqué?.

$$6x + by = 0$$
$$3x + 6y = 0$$

10. ¿Puede asignar un valor a e para que las rectas de ecuaciones:

$$ex + 7y = 3$$
$$8x + 14y = 6$$

sean iguales?.

Después de recoger los exámenes el profesor resuelve el examen en el pizarrón, aclara las dudas que haya e invita a los alumnos a reflexionar acerca de los resultados obtenidos en relación con sus hábitos de estudio. Les recomienda hacer un horario en el cual destinen al estudio de cada materia al menos cuatro horas semanales. Al entregar los exámenes ya calificados, el profesor solicitará a los alumnos escribir una reflexión sobre sus resultados, que debe quedar incluida en su portafolios. Es conveniente que el profesor se entreviste personalmente con los alumnos que hayan obtenido bajas calificaciones.

6. Ejercicio sobre importancia de la materia.

La finalidad de este ejercicio es ayudar al estudiante a reflexionar sobre la importancia que tienen los objetivos de la materia desde diferentes puntos de vista.

Desarrollo: el profesor explica que es propio del ser humano reflexionar acerca del valor que tiene lo que está haciendo. Recuerda que un objetivo de este curso es desarrollar nuestra capacidad de plantear y resolver problemas utilizando modelos algebraicos.
A continuación solicita a los estudiantes aportar ideas acerca del valor que tiene desarrollar la capacidad de plantear y resolver dichos problemas:

a)-Desde el punto de vista de lo que nos aporta personalmente (gusto, hábito de concentración, pensamiento ordenado, etc.)
c)-Desde el punto de vista de las demás materias que estudiamos o vamos a estudiar.
b)-Desde el punto de vista de la actividad u ocupación para la cual nos estamos preparando en la Universidad.

Invita finalmente a los estudiantes a explicar porqué aquello para lo que se están preparando es valioso para otras personas o para el País.

7. Ejercicio sobre expectativas y compromisos.

La finalidad de este ejercicio es favorecer expectativas altas de aprendizaje y compromisos de estudio y colaboración en los integrantes del grupo.

Desarrollo: Antes de que el profesor proponga y aclare las normas del curso relativas a puntualidad, tareas, asistencia, calificación, etc., promueve una reflexión sobre el fundamento de estas normas: la calidad del curso.

Seguramente todos queremos que este curso sea un curso de mucha calidad. De acuerdo con los estudiosos calidad es satisfacer los requerimientos del cliente. **¿Quién es el cliente de este curso y cuáles son sus requerimientos?. ¿Qué le corresponde hacer al profesor para lograr un curso de calidad?, ¿qué le corresponde hacer a cada estudiante?.**

"Hay muchas maneras de explicar los milagros económicos japoneses de la posguerra-escribe el traductor del libro del Dr. Ishikawa- Pero al final de cuentas, destacan los factores humanos...Realmente causa admiración observar la sala de control de la planta de Nippon Kokan en Ohgishima, representativa de lo último en la tecnología del acero. Pero la admiración crece al ver a los obreros de la planta reunidos en pequeños círculos de calidad. Allí comparten sus conocimientos, hablan de los problemas que han surgido y se ayudan unos a otros en la búsqueda de soluciones." (Ishikawa, 1992, p IX)

¿Qué les sugiere la lectura anterior con respecto al ambiente de nuestro curso?, ¿Qué le corresponde hacer al profesor para lograrlo?, ¿qué le corresponde hacer a cada estudiante?.

Después de escuchar algunas aportaciones de los alumnos a estas preguntas, el profesor propone las normas del curso, haciendo ver su relación con la reflexión realizada. Una vez establecidas las normas, el profesor debe ser firme en su cumplimiento.

8. Ejercicio para el uso de la computadora

La finalidad de este ejercicio es introducir a los alumnos al uso del sistema de cálculo simbólico "Mathematica" como una herramienta computacional para el estudio del Algebra. Es importante que el alumno se familiarice con este tipo de sistemas y que sepa cuándo y cómo utilizarlos para la solución de problemas.

Desarrollo: Se solicita a los estudiantes leer el documento "Introducción al Algebra Lineal con Mathematica" que se anexa y seguir las instrucciones que contiene. Cada alumno trabaja en una computadora pero es deseable que compartan ideas relacionadas con lo que hacen. En caso de necesidad se cuenta con la asesoría del profesor o de un encargado.

El profesor comentará con los estudiantes las dificultades y aciertos que haya notado en la realización de este trabajo.

II. EJERCICIOS DE EXPERIMENTACION Y COMPRENSION.

INTRODUCCION

Probablemente todos hemos tenido que memorizar algunas cosas que no entendíamos y repetirlas ante el profesor "como pericos" para salir del paso.
Los ejercicios de experimentación y comprensión que proponemos aquí tienen precisamente la finalidad de ayudar al estudiante de Algebra Superior I a lograr una mejor comprensión de la materia de estudio, de tal manera que cuando diga una definición, aplique un teorema, resuelva un problema o utilice un procedimiento, sepa lo que esta haciendo.

De acuerdo con Lonergan, el proceso de entender empieza con algún dato de la experiencia con respecto al cual uno se hace preguntas. La comprensión se da al surgir dentro de uno la respuesta a esas preguntas y, finalmente, esta comprensión se manifiesta en una expresión que puede servir para facilitar la comprensión a otros.

Hay, entonces, un punto de partida (el dato de la experiencia) y un punto de llegada (la formulación de la comprensión). En el caso del Algebra, el punto de llegada consiste en formular definiciones, proponer teoremas, aplicar procedimientos y resolver problemas.

Cabe notar que el punto de partida puede incluir "el libre juego" con los objetos matemáticos de un entorno adecuado que, de acuerdo con Dienes, es la primera etapa en el camino que conduce a la construcción de un sistema matemático formal. (Dienes, 1977).

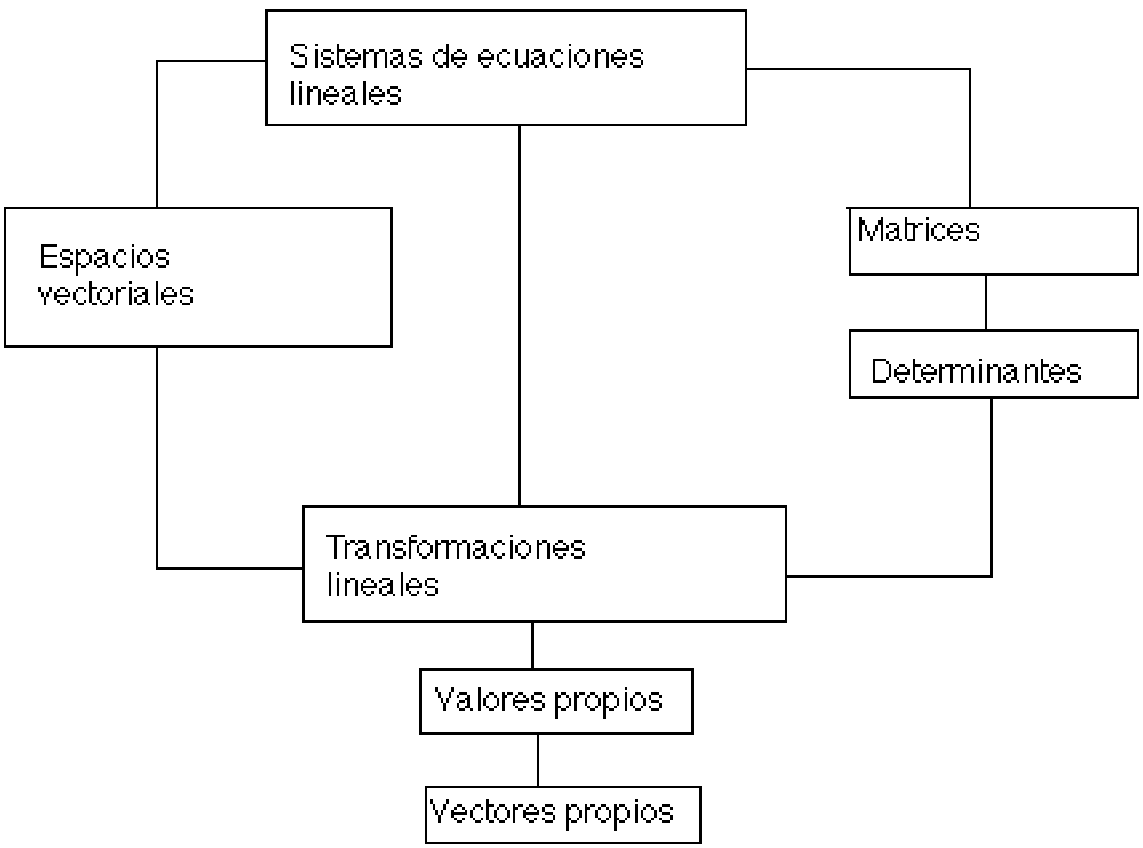
Corresponde al maestro dirigir la atención del alumno hacia el punto de partida, ayudarlo a elaborar las imágenes y hacerse las preguntas que lo van a conducir a la comprensión y, finalmente impulsarlo a la formulación de la comprensión.

Hemos llamado a estos ejercicios de experimentación y comprensión porque abarcan tanto el punto de partida (experimentación) como el punto de llegada (formulación de la comprensión). Cada ejercicio se orienta principalmente a la comprensión de alguno de los siguientes cuatro elementos del Algebra:

a)-Definiciones, que expresan lo que algo es (como por ejemplo decir qué es un sistema de ecuaciones lineales).
b)-Procedimientos y operaciones, que son formas de hacer algo (como por ejemplo aplicar el método de eliminación gaussiana o la regla de Cramer).
c)-Teoremas, que afirman algo sobre los objetos de estudio (como por ejemplo, enunciar las proposiciones relativas a las propiedades de los determinantes).
d)-Problemas, que consisten en la búsqueda de algo (como por ejemplo, determinar la cartera de inversiones más adecuada para un cliente).

El contenido o materia de los ejercicios tiene que ver con los siguientes conceptos de Algebra lineal:

RED DE CONCEPTOS DE ALGEBRA LINEAL



Se trata entonces de proponer algunos ejercicios que puedan ser útiles para facilitar la comprensión de definiciones, procedimientos, teoremas y problemas propios del Algebra Lineal. Estos ejercicios no pretenden en modo alguno agotar la materia sino únicamente ejemplificar modos de abordarla que ayuden a su mejor comprensión.

EJERCICIOS PARA LA EXPERIMENTACION Y LA COMPRENSION

A. DEFINICIONES

1. Ejercicio sobre la definición de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno pueda representar un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y referirse a sus elementos utilizando los términos y símbolos comúnmente aceptados. Ello le permitirá estudiar afirmaciones relativas a todos los sistemas de ecuaciones lineales e inferir sus consecuencias para sistemas particulares.
Desarrollo: a continuación se presenta un texto que incluye "preguntas de repaso", "exposición" y "preguntas de comprensión". El profesor invita a los alumnos a responder las "preguntas de repaso" primero individualmente y luego a comparar con un compañero sus respuestas. Después el profesor expone o los alumnos leen la "exposición". Finalmente, los alumnos responden individualmente a las "preguntas de comprensión", comentan sus respuestas con un compañero y finalmente el profesor aclara las dudas que puedan subsistir.

A. Preguntas de repaso:

Estamos familiarizados ya con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas como el siguiente:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

Recordemos algunas definiciones relacionadas con este sistema:

Los **coeficientes** del sistema son los números :

los **términos independientes** del sistema son los números:

Las **incógnitas** o variables del sistema son:

Las ecuaciones del sistema se llaman **lineales** porque:

¿Es la pareja ordenada de números (10/7 , -5/14) una **solución** del sistema de ecuaciones?, ¿porqué?

¿Es la pareja ordenada de números (5/7 , -10/7) una **solución** del sistema de ecuaciones?, ¿porqué?

Steven J. Leon estima que " no sería conservador calcular que más del 75% de todos los problemas matemáticos que se encuentran en aplicaciones científicas o industriales tienen que ver con la resolución de un sistema lineal en alguna etapa de un proceso"(Leon, 1993, p.1) Pero no todos esos sistemas son tan sencillos como el de nuestro ejemplo sino que pueden tener un gran número de ecuaciones lineales e incógnitas. Es necesario, entonces, extender las definiciones que hemos recordado antes a un sistema de ecuaciones lineales con cualquier número de ecuaciones y de incógnitas:

B. Exposición:

Un sistema de m ecuaciones lineales con las n incógnitas $x_1, x_2, \ldots,$ x_n , puede escribirse en la forma:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad \mathrm{M} \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

En la que los coeficientes están representados por $\mathbf{a_{ij}}$ (siendo *i* el número de ecuación al que pertenece el coeficiente y *j* el numero de la incógnita a la que está vinculado). Por ejemplo a_{32} se lee "a tres dos" y significa: "el coeficiente de x dos en la tercera ecuación del sistema".
Los términos independientes del sistema están señalados en la forma $\mathbf{b_i}$, donde i es el número de ecuación a la que pertenece el término independiente. Por ejemplo b_2 , se lee " b dos " y significa: "El término independiente de la segunda ecuación".
Una **solución** de este sistema es un conjunto ordenado de n números (o eneada de números):

$$(b_1, b_2, \ldots, b_3)$$

tal que cuando ponemos en cada una de las ecuaciones, en lugar de las incógnitas los números correspondientes de la eneada, todas las ecuaciones se convierten en proposiciones verdaderas.

Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución se dice que es **compatible,** de lo contrario es **incompatible**. Si un sistema compatible posee una y sólo una solución se dice que es **determinado** y si tiene más de una solución se dice que es **indeterminado.**

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos sus términos independientes son iguales a cero. Si tiene aunque sea un sólo término independiente distinto de cero, se dice que el sistema es **no homogéneo**.

C. Preguntas de comprensión.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 10 \\ 3x - 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

a)- ¿ Es el conjunto ordenado (5, 2, 6) una solución del sistema? ¿Porqué?

b)-¿Son lineales las ecuaciones del sistema? ¿porqué?

c)-Qué números del sistema corresponden a los siguientes coeficientes: a_{11}, a_{22} y a_{21}

d)-¿Cuál es el coeficiente de la tercera incógnita en la segunda ecuación del sistema?

2. ¿Es el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 3y^2 + 4z^3 &= 10 \\ 4x - 3y^2 - 2z^3 &= -6 \end{aligned}$$

un sistema de ecuaciones lineales?, ¿Porqué?.

3. ¿Qué diferencia hay entre un término independiente y un coeficiente de una ecuación lineal?.

4. Con respecto al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 6u + 2v &= 22 \\ 4u - 4v &= 4 \\ 2u + 6v &= 18 \end{aligned}$$

a)-¿Cuáles son las incógnitas ?

b)-¿Es la pareja (2, -5) una solución del sistema?, ¿porqué?

5. Escriba el sistema de ecuaciones lineales con las tres incógnitas x_1, x_2, x_3 , que tiene los coeficientes: $a_{11}=1$, $a_{22}=2$, $a_{33}=3$, $a_{12}=4$,

$a_{13}=5$, $a_{21}=6$, $a_{23}=7$, $a_{31}=8$, $a_{32}=9$ y los términos independientes $b_1=9$, $b_2=6$ y $b_3=7$.

6. ¿Cuántos coeficientes tiene un sistema de 13 ecuaciones lineales con 15 incógnitas?, ¿Cuántos términos independientes?

7. Escriba un sistema de dos ecuaciones distintas con cuatro incógnitas que tenga la solución (3, 4, 0, 2).

8. Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera, falsa o indeterminada (es decir, que puede ser verdadera o falsa) y porqué:

   a)- Si (a, b, c, d) es solución de la primera ecuación de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, entonces: (a, b, c, d) es solución de dicho sistema de ecuaciones.

   b)- Si (a, b, c, d) no es solución de la primera ecuación de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, entonces: (a, b, c, d) no es solución de dicho sistema de ecuaciones.

   c)- Si (2, 3, 1, 5) es solución de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, entonces ese sistema es indeterminado.

   d)- Hay un sistema de ecuaciones lineales que es, a la vez, incompatible y determinado.

   e)- Si las dos rectas que representan un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas son paralelas, entonces el sistema es compatible.

9. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede representar como un par de líneas rectas. ¿Cómo se podrá representar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?.

10. La matriz de coeficientes del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

es el arreglo rectangular de números:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Escriba la matriz de coeficientes de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

2. Ejercicio para la definición de espacio vectorial.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno comprenda la definición formal de espacio vectorial a partir de elementos familiares para él.

Desarrollo: el profesor pide a los alumnos que formen equipos de dos y escribe en el pizarrón las parejas ordenadas: (-3, -6), (1, 2), (0, 0), (1, 3), (-2, -6), (3, 9), (2, 4). Explica que en un juego llamado "aritmética de puntos" hay las siguientes reglas:

1. Los puntos se pueden sumar: (a,b)+(c,d)= (a+b, c+d)
2. Los puntos se pueden multiplicar por cualquier número: k(a, b)=(ka, kb).
3. Un mismo punto se puede usar varias veces.

Empleando estas reglas, los jugadores deben formar cada uno de los tres puntos (2,2), (6,2) y (4,8), que son los vértices de un triángulo.
Por ejemplo, el punto (2,18) se puede obtener de los puntos (3,5) y (1,2) de la siguiente manera:

2(3, 5)-4(1,-2) = (2, 18)

Gana el jugador que utilice el menor número de puntos distintos para formar los vértices del triángulo. ¿Qué puntos debería elegir un jugador para ganar?.

El resultado esperado es que todos los equipos encuentren que:

a)- Son necesarios y suficientes dos puntos, combinados en la forma:

$$k_1(1,3) + k_2(1,2)$$

para formar todos y cada uno de los vértices (a, b) del triángulo.

b)- Si el punto A es igual al punto B multiplicado por algún número, entonces no es posible formar los tres vértices del triángulo con A y B.

A continuación, el maestro dice a los alumnos que en un juego llamado "aritmética de matrices" , en el que todas las matrices tienen dos renglones y dos columnas, hay las siguientes reglas:

1. Las matrices se pueden sumar:

.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

2. Las matrices se se pueden multiplicar por cualquier número: k(a, b)=(ka, kb).

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

3. Una misma matriz se puede usar varias veces.

Empleando estas reglas, los jugadores deben formar cualquier matriz que se les pida utilizando solamente las matrices que hayan escogido desde el principio del juego. Por ejemplo, si se pidiera la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

un jugador que tuviera las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

podría formarla de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Gana el jugador que utilice el menor número de matrices distintas para formar cualquier matriz que se le pida. ¿Cuántas matrices debe tener un jugador para ganar?, ¿Qué matrices debe tener?.

El resultado esperado es que todos los equipos encuentren que:

a)- Son necesarias y suficientes cuatro matrices, combinadas en la forma:

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

para formar cualquier matriz

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

que se pida.

b)- Hay semejanzas entre la "aritmética de puntos" y la "aritmética de matrices".

El profesor explica que tanto la "aritmética de puntos" como la "aritmética de matrices" son espacios vectoriales, ya que un **espacio vectorial** tiene las siguientes características:

1. Es un conjunto de objetos. (En el caso de la aritmética de puntos estos objetos son todas las parejas ordenadas de R^2 y en el caso de la aritmética de matrices son todas las matrices de dos renglones con dos columnas formadas con números reales). Estos objetos se llaman **vectores**.

2. En este conjunto de objetos están definidas dos operaciones: la **suma de vectores** y la **multiplicación de un vector por un escalar**. (En el caso de la aritmética de puntos la suma de vectores es la suma de puntos y la multiplicación por un escalar es la multiplicación de un punto por un número real. En el caso de la aritmética de matrices la suma de vectores es la suma de matrices y la multiplicación por un escalar es la multiplicación de un matriz por un número real.

3. El profesor pide a los alumnos establecer las propiedades básicas de estas operaciones completando lo que falta en la siguiente lista e ilustrar cada propiedad con ejemplos de los dos juegos de aritmética:

   Si **u,** **v** y **w** son vectores del espacio vectorial V y a y b son escalares, entonces:

   a)- **u** + **v** pertenece a V
   b)- a**u** pertenece a V
   b)- **u** + **v**=
   c)- **u** + (**v** + **w**) =
   d)- **u** + **0** =
   e)- si **a** está en V, existe **-a** en V tal que **a** + (**-a**) = **0**
   d)- c (**u** + **v**) =

d)- (c + d) **u** =
e)- c (d**u**) =
f)- 1(**u**) =

Puede aprovecharse también el ejercicio como punto de partida para definir los conceptos de combinación lineal de vectores, dependencia e independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial.

3. Ejercicio para la definición de determinante.

La finalidad de este ejercicio es que los estudiantes puedan entender el significado de la siguiente definición del determinante de una matriz cuadrada de orden n:

Es la suma algebraica de los n! productos posibles de los n elementos de la matriz, tomando un elemento de cada renglón y de cada columna.
El signo del sumando es positivo si el número de inversiones en la permutación de sus subíndices j es par y negativo si es impar.

Desarrollo: el profesor recuerda que los determinantes son útiles, entre otras cosas, para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Los alumnos están familiarizados ya con los determinantes de matrices cuadradas de orden dos y de orden tres. Se trata ahora de generalizar la noción de determinante a matrices cuadradas de cualquier orden de tal manera que se conserven las propiedades que los hacen útiles. Para ello, el profesor solicita a los alumnos estudiar el documento anexo sobre el origen de los determinantes. Terminado el trabajo en la computadora, los alumnos comentan sus logros y dificultades y el profesor hace notar que los resultados obtenidos quedan bien expresados en la definición antes enunciada.

4. Ejercicio para la definición de transformación lineal

La finalidad de este ejercicio es que el alumno entienda una serie de términos y de símbolos relacionados con las transformaciones lineales .

Desarrollo: el maestro recuerda que la utilidad del curso estriba en que proporciona modelos para plantear y resolver problemas de interés para las personas. Entre esos modelos se encuentran las transformaciones lineales que permiten, por ejemplo, representar ciertos movimientos de los objetos en el plano y en el espacio y, por lo mismo, son útiles en campos tales como la robótica y la graficación por computadora.

Explica que una transformación lineal se puede definir de la siguiente manera: es una función entre los espacios vectoriales A y B que preserva las dos operaciones básicas de un espacio vectorial.

A continuación, plantea las siguientes preguntas para ser respondidas en un diálogo entre el grupo de alumnos y el profesor:

1. ¿Qué es una función?
2. ¿Qué es un espacio vectorial?
3. ¿Cuáles son las dos operaciones básicas de un espacio vectorial?

4. Consideremos ahora que A es el conjunto de matrices de dos renglones con dos columnas cuyos elementos son números reales, que B es el conjunto de parejas ordenadas de números reales R^2 y que T es la función entre A y B que, a una matriz cualquiera

$$m = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

de A le asocia la pareja ordenada (x + z, y + t) de B.

¿Cuál es la imagen de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

bajo la función T?.

5. Defina en A las operaciones de suma y multiplicación por un escalar tales que A sea un espacio vectorial con respecto a esas operaciones. Haga lo mismo con B.

6. Escriba dos elementos particulares de **a** y **b** de A y un escalar (número real) k;
   a)- Sume los dos elementos de A y después aplíquele al resultado la función T.
   b)- Aplíquele primero la función T a cada elemento y después sume los resultados.
   c)- Multiplique un elemento de A por el escalar y aplique la función T al resultado.
   d)- Aplique primero la función T al elemento de A y después multiplique el resultado por el escalar.

   Complete cada una de las siguientes igualdades de tal manera que expresen lo que ha observando:
   T(**a+b**) =
   kT(**a**) =

Por tener estas dos propiedades se dice que T preserva las operaciones básicas de un espacio vectorial.

7. ¿Es T una transformación lineal?, ¿ Porqué?.

8. Consideremos ahora que A es el espacio vectorial R^3 y B el espacio vectorial R^2. Sea S la función S:R^3->R2; S(x, y, z) = (x, y), es decir, la función que a cada vector (x, y, z) de R^3 le asocia el vector (x, y) de R^2. ¿Es S una transformación lineal?, ¿Porqué?.

9. Consideremos que A es el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos y que B es el conjunto R de los números reales. El conjunto de los número reales constituye un espacio vectorial con respecto a la suma de números reales y a la multiplicación de un número real por un número real.
   Diga cuales de las siguientes funciones entre A y B son transformaciones lineales y cuáles no. Justifique su respuesta.

   a)- $f: A \to B; f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x + t$

   b)- $g: A \to B; g\begin{pmatrix} x & \mathrm{y} \\ \mathrm{z} & \mathrm{t} \end{pmatrix} = xt - yz$

   c)- $h: A \to B; h\begin{pmatrix} x & \mathrm{y} \\ \mathrm{z} & \mathrm{t} \end{pmatrix} = xz - yt$

10. Sea T:A->B una transformación lineal. Sabemos que si **x** es un elemento de A, entonces T(**x**) representa la imagen de **x** bajo la función T, es decir, el elemento de B en el que la función transforma a **x**. Sabemos también que en todo espacio vectorial hay un cero o elemento nulo que se denota mediante el símbolo **0**.
    El **núcleo** o **kernel** de la transformación lineal T es el conjunto de vectores de A que se transforman en el vector **0** de B**.**
    Por ejemplo, el núcleo de la transformación lineal de la pregunta cuatro es el conjunto de matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

    pues todas ellas se transforman en el vector nulo (0,0).

    ¿Cuáles son tres elementos del núcleo de la transformación S de la pregunta 8?.

11. Si T: A->A es una transformación lineal entonces T es una transformación del espacio vectorial A en si mismo. Algunos autores llaman a este tipo de transformaciones **operadores lineales.** He aquí tres ejemplos:

$$A: R^2 \to R^2; A(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$$

$$B: R^3 \to R^3; B(x, y, z) = (x - y, x + 2z, x + y + 3z)$$

$$C: R^2 \to R^2 : C(x, y) = (4x, 4y)$$

En relación con este tipo de transformaciones es útil preguntarse si hay algo que no cambia cuando se aplica la transformación. Lo que puede no cambiar se precisa en la siguiente definición:

Se dice que el vector **x** es un **vector propio** de la transformación lineal T si T(**x**)=l**x**. El escalar l se llama un **valor propio** de la transformación lineal T.

Por ejemplo, (-2, 0, 1) es un vector propio y 1 es un valor propio de la transformación lineal B ya que

B(-2, 0, 1) = (-2, 0, 1)

12. ¿Es 4 un valor propio y (1,2) un vector propio de la transformación lineal C ?, ¿Porqué?.

B. PROCEDIMIENTOS Y OPERACIONES.

5. Ejercicio sobre procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno conozca y pueda utilizar procedimientos relacionados con la solución de sistemas de ecuaciones lineales.
Desarrollo: el profesor explica que dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se plantean tres preguntas: ¿tiene o no solución?, de tener solución ¿Cuántas soluciones tiene? y ¿cómo se encuentran esas soluciones?. Con el fin de responder a estas tres preguntas se utilizan los siguientes procedimientos:
Escribir la **matriz ampliada** y la **matriz de coeficientes** del sistema. Mediante **operaciones elementale**s con los renglones de estas matrices reducirlas a la **forma escalonada**. Si el **rango** de la matriz de

coeficientes es igual al de la matriz ampliada, entonces el sistema tiene solución, de lo contrario no tiene solución.
Si el sistema tiene solución y el rango de la matriz de coeficientes es igual al número de incógnitas, entonces el sistema tiene sólo una solución, si el rango r es menor que el número de incógnitas n, entonces el sistema tiene infinitas soluciones, que se obtienen asignando a n-r de las incógnitas valores arbitrarios..
Si el sistema tiene solución, dicha solución puede encontrarse aplicando el método de **eliminación de Gauss** o el de **Gauss Jordan** seguidos por la **substitución regresiva**. Si un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene sólo una solución, puede utilizarse también la **regla de Cramer.**
Para estudiar estos procedimientos, el profesor solicita a los alumnos resolver en la computadora los ejercicios que se encuentran en el documento anexo intitulado "Procedimientos relacionados con la solución de sistemas de ecuaciones lineales" .

6. Ejercicio sobre transformaciones lineales y multiplicación de matrices.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno pueda efectuar las siguientes actividades relacionadas con la multiplicación de matrices y las transformaciones lineales:

1. Determinar si dos matrices son o no iguales.
2. Juzgar si se pueden multiplicar o no dos matrices y , en su caso, efectuar la multiplicación.
3. Representar una composición de transformaciones lineales por medio de una multiplicación de matrices.
4. Encontrar la matriz inversa de una matriz dada.
5. Encontrar los valores y vectores propios de una transformación lineal.

Desarrollo: el profesor explica a los alumnos la finalidad del ejercicio. Los invita después a estudiar y resolver en la computadora, el documento anexo intitulado "Multiplicación de Matrices y Transformaciones Lineales". Durante el ejercicio, la participación del maestro consiste en aclarar las dudas que los alumnos no puedan resolver por si mismos, recordarles que pueden crear sus propios ejemplos y ejercicios modificando los datos que se encuentran en el texto y animarlos a formular las conclusiones que están sugeridas en el documento.

7. Ejercicio sobre la descomposición de una matriz cuadrada en matrices triangulares.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno se familiarice con el concepto y el procedimiento para la factorización LU de matrices.
Desarrollo: el profesor explica a los alumnos que las matrices cuadradas que se utilizan en la práctica son a veces muy grandes. Por ejemplo, en el "Mercado de Matrices" de internet puede encontrarse una matriz cuadrada de orden 425, relacionada con el modelo de una planta de ácido nítrico, una matriz de orden 1919 para un modelo oceanográfico orientado al estudio de las mareas y una matriz de orden 2873 para un modelo de control del tráfico aéreo. Aún para las actuales computadoras los cálculos relacionados con estas y otras matrices pueden presentar grandes dificultades de precisión, tiempo y memoria y ello ha conducido a la búsqueda de procedimientos eficientes desde estos puntos de vista. Entre estos procedimientos se encuentra la descomposición de una matriz cuadrada en matrices triangulares.
Después, los invita a estudiar y resolver en la computadora, el documento anexo intitulado "Descomposición de una matriz cuadrada en matrices triangulares".

8. Ejercicio sobre operaciones con vectores.

La finalidad de este ejercicio es que los alumnos puedan interpretar el espacio vectorial R^2 como un conjunto de desplazamientos en el plano y entender las operaciones de multiplicación de un escalar por un vector, suma de vectores y producto escalar de vectores a la luz de esta interpretación.

Desarrollo: el profesor recuerda a los alumnos que el concepto de vector surgió originalmente en relación con el estudio de cantidades tales como el desplazamiento, la fuerza, la velocidad y la aceleración. Algunas de las operaciones que se pueden realizar con los vectores tienen también aplicaciones en Física y otros campos. Entre esas operaciones se encuentra el producto escalar de vectores mediante el cual se puede calcular por ejemplo, el trabajo hecho para desplazar una partícula a lo largo de una trayectoria.
Explica entonces a los alumnos la finalidad del ejercicio y los invita a estudiar y resolver en la computadora el documento anexo intitulado "Operaciones con Vectores".

9. Ejercicio sobre cambio de base.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno se familiarice con el concepto y el procedimiento de cambio de base de un espacio vectorial y su relación con la similaridad de matrices.

Desarrollo: el profesor explica que en ocasiones es conveniente hacer un cambio de base en el espacio vectorial de dos o tres dimensiones.

El efecto de estos cambios sobre las transformaciones lineales se relaciona con la similaridad de matrices, que es un concepto básico del Algebra Lineal.
Invita a los alumnos a estudiar y resolver en la computadora el documento anexo intitulado "Matrices Similares".

Una vez esto hecho, el profesor invita a los alumnos a comentar en clase los resultados obtenidos.

C. TEOREMAS.

10. Ejercicio sobre matrices transpuestas y simétricas.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno descubra algunos teoremas relativos a matrices transpuestas, simétricas y antisimétricas, mediante la captación de pautas presentes en algunos ejemplos.

Desarrollo: el profesor explica que hay algunas matrices que tienen especial importancia en la teoría y en las aplicaciones. Entre ellas se encuentran las matrices simétricas, que se utilizan por ejemplo, en el estudio de las formas cuadráticas
Después, invita a los alumnos a estudiar y resolver en la computadora, el documento anexo intitulado "Matrices Transpuestas y Simétricas".

Como resultado de este ejercicio se espera que los alumnos, generalizando lo observado en algunos ejemplos, enuncien los siguientes teoremas:

Matrices transpuestas:

Si A y B son dos matrices cuadradas y A^T y B^T son sus respectivas matrices transpuestas y A-1 es la matriz inversa de A entonces:
a)- $(A+B)^T = A^T + B^T$
b)- $(AB)^T = (BA)^T$
c)- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
d).-El rango de A es igual al rango de A^T.

Matrices simétricas:

Si A es una matriz simétrica, entonces A es una matriz cuadrada.
Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^T$ es una matriz simétrica.
Si A es una matriz cuadrada, entonces AA^T es una matriz simétrica.
Si A y B son dos matrices simétricas, entonces:
a)-A + B es una matriz simétrica
b)-AB es una matriz simétrica sí y sólo sí AB = BA.
c)-Si A es invertible, entonces A^{-1} es una matriz simétrica.

d)-A^2 y A^3 son matrices simétricas.
e)-Si A se puede expresar como el producto de dos matrices L y U tales que L es triangular inferior y U es triangular superior, entonces A se puede expresar como el producto LDL^T en el que D es una matriz diagonal.

Matrices antisimétricas:

Si A es una matriz cuadrada, entonces $A\text{-}A^T$ es una matriz antisimétrica.
Si el orden de la matriz cuadrada A es impar, entonces el determinante de A es cero.
Si A es una matriz cuadrada, entonces A = B + C, donde B es una matriz simétrica y C es una matriz antisimétrica.

11. Ejercicio sobre sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.

La finalidad de este ejercicio es que los alumnos reconozcan en ejemplos particulares el significado y el valor de las siguientes afirmaciones generales:
a)-Cualquier combinación lineal de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución de ese sistema homogéneo.
b)-Si se elige una solución particular de un sistema no homogéneo y se le añade una solución cualquiera del sistema homogéneo asociado, el resultado es también una solución del sistema no homogéneo.
c)-La dimensión del núcleo de la matriz de coeficientes de un sistema más el rango de la matriz es igual al número de incógnitas del sistema.

Desarrollo: el profesor explica a los alumnos que el ejercicio tiene la finalidad de estudiar algunos teoremas relacionados con la solución de sistemas de ecuaciones lineales y los invita a estudiar y resolver en la computadora el documento anexo intitulado "Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales".

Cabe notar que ejercicio implica también la aplicación de algunas afirmaciones generales relativas al rango de la matriz de coeficientes de un sistema, a la dimensión del espacio de renglones y del espacio de columnas de dicha matriz y al hecho de que el sistema tiene solución si y sólo si el vector de términos independientes es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz.

El profesor puede graduar el grado de ayuda a los alumnos en la realización del ejercicio eligiendo incluir o no la parte oculta del documento mencionado.

12. Ejercicio sobre matrices y valores propios.

La finalidad de este ejercicio es que los alumnos, razonando por analogía con los polinomios algebraicos encuentren raíces de polinomios matriciales y descubran el teorema de Cayley-Hamilton. Se trata también de que a partir de preguntarse porqué el producto de algunas matrices es conmutativo y el de otras no, descubran que el producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es conmutativo si y sólo si esas matrices tienen los mismos vectores propios.

Desarrollo: el profesor explica a los alumnos que la finalidad del ejercicio es encontrar algunas relaciones entre las matrices y sus valores y vectores propios y los invita a estudiar y resolver en la computadora el documento anexo intitulado "Matrices y Valores Propios".

El ejercicio se basa en la idea de que el razonamiento por analogía y la búsqueda de la causa de algo son vías para el descubrimiento y comprensión de teoremas.

13. Ejercicio sobre los círculos de Gershgorin.

La finalidad de este ejercicio es que los alumnos desarrollen su habilidad de aprender por medio de la lectura.

Desarrollo: el profesor pide a los alumnos que lean el Teorema de los círculos de Gershgorin y que, con el auxilio de la computadora e individualmente:

a)-Lo expliquen por escrito con sus propias palabras.
b)-Lo ejemplifiquen con una matriz cuadrada de orden tres.
c)-Ilustren gráficamente el ejemplo.
d)-Elaboren un procedimiento en la computadora para mostrar gráficamente los círculos de Gershgorin y los valores propios de cualquier matriz cuadrada de orden tres.

Una vez que los alumnos han terminado, el profesor recoge los trabajos y los devuelve una semana después con comentarios.

El tipo de resultados que se espera se encuentra en el documento anexo sobre los círculos de Gershgorin.

D. PROBLEMAS.

14. Ejercicio sobre distancias.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno desarrolle la habilidad de reconocer y resolver problemas relacionados con la magnitud y la perpendicularidad de vectores.

Desarrollo: el profesor explica a los estudiantes que tanto para la investigación científica como para el mejoramiento de productos y servicios es importante la búsqueda de patrones o pautas en conjuntos de datos. A manera de ejemplo les propone el siguiente problema:

Un fabricante de resortes de acero sospecha que algunos lotes de su producto tienen más unidades defectuosas que otros debido al número de pequeñas variaciones en la temperatura del horno de fundición.

La siguiente tabla muestra los datos obtenidos sobre el número de variaciones diarias de temperatura y el porcentaje de unidades aceptables en el lote producido cada uno de seis días de una semana:

Día de la Semana	**Número de variaciones de temperatura**	**Porcentaje de unidades aceptables .**
Lunes	6	.81
Martes	8	.93
Miércoles	5	.75
Jueves	7	.84
Viernes	9	.92
Sábado	6	.83

¿Cuál debe ser el número máximo de variaciones de temperatura durante un día para que el porcentaje de unidades aceptables sea de 95?.

Para precisar el problema el profesor sugiere hacer una gráfica de estos puntos, considerando el número de variaciones de temperatura como abscisa y el porcentaje de unidades defectuosas como ordenada, utilizando una escala "apropiada".

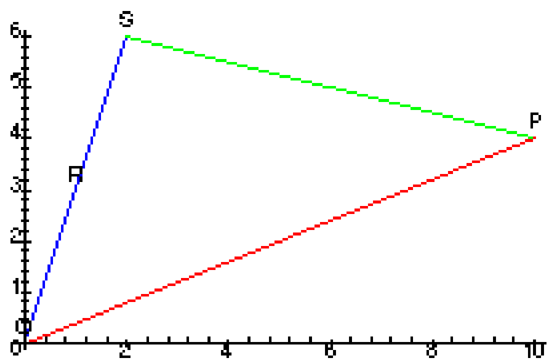
Por medio de preguntas y sugerencias el profesor puede ayudar a los alumnos a reconocer que el problema consiste en establecer la linea que mejor se ajuste a esos datos.

Una vez planteado el problema, el profesor puede ayudar a los alumnos a resolverlo, proponiéndoles tres problemas más sencillos y conduciendo en relación con cada uno de ellos el tipo de diálogo que se ilustra a continuación:

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Problema: encontrar la menor distancia del punto P (10,4) a la recta L que pasa por el origen y el punto R de coordenadas (1,3).

1. *Representemos la situación por medio de una figura:*



La línea azul representa la linea L, la línea roja es el vector que va del origen al punto P (10,4) y la línea verde es el vector que va del punto P a un punto cualquiera S de la línea R.

1. *¿Qué es lo que buscamos?*
La menor distancia d que hay entre el punto P y la recta L.

3. *¿Cuáles son los datos?*
Las coordenadas del punto P (10,4) y las de dos puntos de la recta L: O (0,0) y R (1,3).

4. *¿Qué relación hay entre los datos y lo que buscamos?*
Lo que buscamos es la distancia más corta entre el punto P y la recta L. Esa distancia más corta es la longitud del vector SP que une el punto P con algún punto S de la línea L y que es perpendicular a la línea L.

6. *¿Qué significa esto? (utilizando notación apropiada):*
Que d es la norma del vector SP, donde:
el vector S es de la forma k(1,3) por estar sobre la línea S.
el vector SP es igual a P-S, es decir, a (10-k,4-3k).
el producto escalar (1,3)•(10-k,4-3k) es igual a cero.
.
7. Entonces*, ¿Qué hay que hacer para encontrar d?*

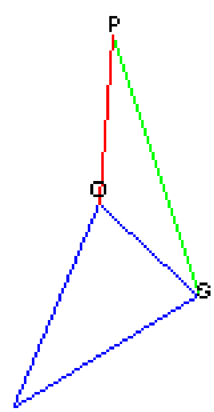
Efectuar el producto escalar (1,3)•(10-k,4-3k)
Encontrar el valor de k para el cual el producto escalar es igual a cero.
Con este valor de k, encontrar SP.
Finalmente, encontrar d, que es la norma de SP y la solución del problema.

8. *¿Qué podemos hacer para asegurarnos de que la solución del problema es correcta?.*

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.

Problema: encontrar la menor distancia del punto P ((1,2,14) al plano generado por los vectores v1 y v2 que parten del origen O y tienen como extremos los puntos Q (1,4,3) y R (3,1,-2) respectivamente.

1. *Representemos la situación por medio de una figura:*



La línea roja representa el vector que va del origen al punto P, las lineas azules se encuentran sobre el plano generado por los vectores v1 y v2 y la línea verde es el vector que va del punto P a un punto S cualquiera del plano T generado por v1 y v2. .

1. *¿Qué es lo que buscamos?*
La menor distancia d que hay entre el punto P y el plano T generado por los vectores v1 y v2..

3. *¿Cuáles son los datos?*
El punto P ((1,2,14) y los dos vectores v1=(1,4,3.) y v2=(3,1,-2) que generan el plano T.

4. *¿Qué relación hay entre los datos y lo que buscamos?*
Lo que buscamos es la distancia más corta entre el punto P y el plano T. Esa distancia más corta es la longitud del vector SP que une el punto P con algún punto S del plano T y que es perpendicular a cualquier vector S del plano T

6. *¿Qué significa esto? (utilizando notación apropiada):*
Que d es la norma del vector SP, donde
a)-el vector S es de la forma k(1,4,3.)+m (3,1,-2) por pertenecer al plano T
b)-el vector SP es igual a P-S, es decir, a (1-k-3m,2-4k-m,14-3k+2m).
c)-los productos escalares:
(1,4,3))•(1-k-3m,2-4k-m,14-3k+2m) y
(3,1,2))•(1-k-3m,2-4k-m,14-3k+2m)
son iguales a cero.
.
7. Entonces*, ¿Qué hay que hacer para encontrar d?*
Efectuar los productos escalares (1,4,3))•(1-k-3m,2-4k-m,14-3k+2m) y (3,1,2))•(1-k-3m,2-4k-m,14-3k+2m).
Encontrar los valores de k y m para los cuales ambos productos escalares son al mismo tiempo iguales a cero.
Con estos valores de k y m, encontrar SP.
Finalmente, encontrar d, que es la norma de SP y la solución del problema.

8. *¿Qué podemos hacer para asegurarnos de que la solución del problema es correcta?.*

AJUSTE DE UNA RECTA.

Problema: sean los puntos A (3,1), B (2,5) y C(-1,2). Encuentre la recta y=ax+b que tenga una menor distancia con respecto a ellos.

¿Cuáles son los datos?
Los puntos A (3,1), B (2,5) y C(-1,2)

¿Cuál es la incógnita?
Una recta y=ax+b

¿Qué condición debe satisfacer la incógnita?
Que la suma de las distancias de la recta y=ax+b a los puntos A, B y C sea menor que la suma de las distancias de esos puntos a cualquier otra recta.

¿Qué significa esto? (utilizando notación apropiada):
Que si y=ax+b es la recta que estamos buscando, la suma de los cuadrados de las diferencias d1=1-(3a+b), d2=5-(2a+b) y d3=2-(-a+b) es menor que para cualesquiera otros valores distintos de a y b.

¿Podemos recordar algún problema relacionado con este?
El de la distancia de un punto a un plano. De hecho, las diferencias d1, d2 y d3 pueden ser vistas como las componentes del vector (1,5,2)-(3a+b, 2a+b,-x+b). Este vector va del punto S (3a+b, 2a+b,-a+b), que pertenece al plano generado por los vectores (3,2,-1) y (1,1,1), al punto P (1,5,2).

¿Cómo podemos expresar entonces la condición que debe satisfacer la incógnita?.
El vector (1,5,2)-(3a+b, 2a+b,-a+b) debe tener la menor magnitud posible, es decir, el vector (1,5,2)-(3a+b, 2a+b,-a+b) debe ser ortogonal al plano generado por los vectores (3,2,-1) y (1,1,1).

Entonces, ¿Qué hay que hacer para encontrar la incógnita?
Encontrar los valores de a y b para los cuales simultáneamente:
((1,5,2)-(3a+b, 2a+b,-a+b))•(3,2,-1) =0
((1,5,2)-(3a+b, 2a+b,-a+b))•(1,1,1) =0
Con estos valores, escribir la recta: y=ax+b

¿Es la suma de los cuadrados de las distancias de la recta solución a los puntos d1, d2 y d3 igual a la norma del vector (1,5,2)-(3x+b, 2x+b,-x+b)?

¿Qué podemos hacer para asegurarnos de que la solución del problema es correcta?.

Este tipo de diálogos tiene la finalidad de ayudar a los alumnos a desarrollar estrategias para la solución de problemas.

Una vez que con esta u otras ayudas, los alumnos hayan resuelto el problema, el profesor los invitará a automatizar el procedimiento para resolver otros problemas similares.

Algunos procedimientos de computadora relacionados con este ejercicio se encuentran en el documento anexo intitulado "Distancias".

15. Ejercicio sobre matrices estocásticas.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno desarrolle su capacidad de reconocer y resolver problemas que corresponden a un proceso de Markov.

Desarrollo: el profesor propone el siguiente problema, que puede ser de interés para los responsables de la administración de carreteras:

Del pueblo A al pueblo B se desplazan mensualmente 50,000 vehículos. Los conductores pueden utilizar una de dos carreteras: la libre o la de cuota. Durante el mes de enero del 1996 la carretera libre tuvo un tráfico de 30,000 vehículos y la de cuota un tráfico de 20,000 vehículos. Durante el mes de febrero se observó que 1,500 vehículos que antes utilizaban la carretera libre, ahora utilizan la de cuota y 1,000 vehículos que antes utilizaban la carretera de cuota ahora usan la libre.
De mantenerse estas tendencias de los conductores a cambiar de carretera ¿Cuántos vehículos utilizarán cada una de las dos carreteras durante cada uno de los 10 meses restantes del año?. *Hagan sus estimaciones.*

A continuación, conduce un diálogo semejante al siguiente, que tiene la finalidad de promover el que los alumnos descubran el mayor numero posible de respuestas por si mismos y se familiaricen al mismo tiempo con el tipo de estrategia indicado por las preguntas:

¿Qué es lo que estamos buscando?:
El número de vehículos que utilizan cada carretera en los meses de Marzo a Diciembre de 1996.

¿Podemos expresar la incógnita empleando una notación apropiada?
Si utilizamos la representación matricial, lo que estamos buscando son diez vectores de la forma

$$d_n=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en los que x representa el número de vehículos que utilizan la libre e y el número de vehículos que utilizan la de cuota durante cada uno de los n meses del año.

¿Cuáles son los datos que tenemos?
Que el total de vehículos que circulan cada mes es de 50,000
Que durante enero 30,000 utilizaron la carretera libre y 20,000 la de cuota.
Que durante el mes de febrero 29,500 utilizaron la libre y 20,500 la de cuota.
Esto significa que 1500 de 30,000 vehículos cambiaron de la libre a la de cuota, es decir, cada mes el 5% de los que utilizan la libre cambiará a la de cuota. Análogamente podemos calcular que el 5% de los que utilizan la libre cambiarán a la de cuota.
En cambio, el 95% de los que utilizan la libre la seguirán utilizando y el 95% de los que utilizan la de cuota la seguirán utilizando.

¿Podemos expresar estos datos empleando la notación apropiada?.

La siguiente matriz resume la tendencia de los conductores a cambiar de carretera o permanecer en la que han usado:

$$A = \begin{pmatrix} .95 & .05 \\ .05 & .95 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el elemento en el primer renglón y la primera columna indica la tendencia o probabilidad de que alguien que utiliza la carretera libre la siga utilizando. *¿Que indica cada uno de los restantes elementos de la matriz?.*

Los vectores d_1 y d_2 representan el número de automóviles que utilizaron cada carretera en los meses de enero y febrero, respectivamente:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 30000 \\ 20000 \end{pmatrix} \text{ y } d_2 = \begin{pmatrix} 29500 \\ 20500 \end{pmatrix}$$

¿Qué relación hay entre los datos y las incógnitas?
El vector que representa el uso en el mes de enero es d_1. Si lo multiplicamos por la matriz A, obtendremos como resultado el vector d_2, que indica el uso de ambas carreteras en el mes de febrero.
Análogamente, el vector d_3, que representa el uso de las carreteras en el mes de marzo se puede obtener como resultado de A(A(d1)), y así sucesivamente.

¿Qué es lo que falta por hacer?
Efectuar los cálculos utilizando una calculadora o la computadora para encontrar $d_3, d_4, \ldots, d_{12}$. Comparemos los resultados con nuestros compañeros para asegurarnos de que lo hacemos bien.

¿Podríamos diseñar un procedimiento de computadora que automatizara la solución de este tipo de problemas?.

El profesor explica que hay muchos problemas de este tipo (procesos de Markov) es decir, problemas relativos a los cambios de estado de un sistema, en los que el cambio de un estado a otro está determinado por una matriz de probabilidades de transición como la matriz A. En esta clase de matrices, llamadas estocásticas, cada elemento es un número entre cero y uno y la suma de los elementos de cada columna es igual a uno.

A continuación invita a los alumnos a formular o buscar problemas similares, como por ejemplo:
Preferencias de los consumidores por la marca de un producto, Migración de la Población, Predicción del Clima, Probabilidad que tiene cada casilla de ser ocupada en un juego como "Monopolio", etc.

Estos problemas pueden resolverse utilizando, con las necesarias adaptaciones, el procedimiento computarizado diseñado por el alumno.

16. Ejercicio sobre formas cuadráticas.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno desarrolle su capacidad de reconocer y resolver problemas relacionados con las formas cuadráticas.

Desarrollo: el profesor explica a los alumnos que según Gerber "el descubrimiento de las matrices y los valores y vectores propios en los siglos XVIII y XIX fue motivado en gran parte por el deseo de describir las trayectorias de los cuerpos celestes en forma más sencilla". (Gerber,1992)
Ese y otros problemas importantes implican el concepto de forma cuadrática. Las formas cuadráticas son ejemplos de un concepto más general que es el de forma bilineal. Las formas bilineales son funciones que asocian a dos vectores un escalar. Otro ejemplo de forma bilineal es el producto escalar de vectores.

El profesor invita entonces a los alumnos a resolver uno o más de los siguientes cuatro problemas de formas cuadráticas:

a)-Mediante un cambio de coordenadas elimine el término en xy de la siguiente ecuación: $5x^2+6xy+2y^2=4$.

b)-Un satélite de comunicaciones gira alrededor de la tierra. La ecuación de la órbita del satélite con respecto a un sistema de coordenadas con origen en el centro de la tierra es:

$$\frac{181}{2}x^2+19xy+\frac{181}{2}y^2=129600($$

¿Cuáles son las distancias máxima y la mínima a las que puede encontrarse el satélite con respecto al centro de la tierra?. (las cantidades de la ecuación están dadas en miles de kilómetros).

c)-Mediante un cambio de coordenadas elimine los términos en xy, xz y yz de la siguiente ecuación e interprete geométricamente la operación.

$$x^2 + 4xy + 2xz + y^2 + 6yz + z^2 = 1$$

d)-El XI Censo General arrojó los siguientes datos sobre vivienda en nueve estratos de la población de México:

6	26	29	36	3	95
11	35	74	17	2	82
15	43	37	16	2	86
20	74	80	13	2	72
26	49	67	12	2	51
52	70	80	10	2	39
31	79	88	8	2	31
58	86	91	8	2	15
81	92	95	7	1	7

Cada renglón de la tabla corresponde a los datos de un estrato. La primera columna es la proporción de viviendas con drenaje, la segunda es la proporción de viviendas con agua entubada, la tercera es la proporción de viviendas con electricidad, la cuarta es la proporción de viviendas con un cuarto, la quinta es el número de ocupantes por cuarto y la sexta es la proporción de viviendas que usan leña o carbón para cocinar. (Ver INEGI, 1994)
Se quieren combinar los resultados de los seis indicadores en un sólo índice que refleje lo más posible las diferencias entre los nueve estratos.

Los problemas se pueden resolver fuera de clase con base en la lectura de un texto tal como el documento para computadora intitulado "Formas Cuadráticas" que se anexa.
El profesor recomienda a los alumnos contestar las preguntas del documento antes de consultar las respuestas que tiene ocultas.
Posteriormente los alumnos entregan al profesor por escrito las respuestas a los problemas planteados y se discuten los aciertos y las dificultades.

III. EJERCICIOS DE REFLEXION.

INTRODUCCION

Mediante la experiencia captamos los datos, mediante la comprensión los entendemos y mediante la reflexión juzgamos si aquello que hemos entendido es verdadero o es falso.
Mediante la experiencia nos familiarizamos con los objetos de las Matemáticas, mediante la comprensión hacemos conjeturas acerca de las relaciones entre esos objetos y mediante la reflexión juzgamos si esas conjeturas corresponden o no a la realidad.
Así entendida, la reflexión se vincula en Matemáticas principalmente con la demostración.
La finalidad de la demostración es establecer la verdad o falsedad de las afirmaciones sobre los objetos de las Matemáticas, principalmente de las afirmaciones llamadas teoremas.

Sin los teoremas y su demostración, los hechos de las Matemáticas nos parecerían inconexos y casuales.
Compete también a la reflexión revisar las operaciones del sujeto que conducen a la afirmación de lo verdadero, es decir las operaciones de experimentar, entender y juzgar.

Los siguientes ejercicios tienen la finalidad de ayudar al estudiante a leer, escribir y evaluar demostraciones.

EJERCICIOS

1. Ejercicio sobre dependencia lineal de vectores.

La finalidad de este ejercicio es ayudar al alumno a desarrollar la habilidad de leer teoremas y demostraciones.

Desarrollo: el profesor explica el papel de los teoremas y las demostraciones en Matemáticas así como la finalidad del ejercicio.

Después escribe en el pizarrón la siguientes definición, que es un preámbulo necesario al teorema que se va a demostrar:

Definición 1: Se dice que el vector $\mathbf{a}$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$ si existen escalares k_1, k_2, ..., k_n tales que $\mathbf{a}=k_1\mathbf{a_1}+k_2\mathbf{a_2}+\ldots+k_n\mathbf{a_n}$.

Pide a los alumnos responder las siguientes preguntas:
¿Es el vector (1,2,0) una combinación lineal de los vectores (-3,0,0), (0,4,0)?,¿porqué?
¿Es el vector (1,2,0) una combinación lineal de los vectores (1,00), (0,2,3)?,¿porqué?

Escribe otra definición en el pizarrón seguida de preguntas que ayuden a captar su significado:

Definición 2: se dice que el conjunto de vectores $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$ es linealmente dependiente, si al menos uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los restantes. De lo contrario se dice que el conjunto de vectores es linealmente independiente.

¿Es el conjunto de vectores (1,2,0), (-3,0,0) y (0,4,0) linealmente dependiente o independiente?, ¿porqué?
¿Es el conjunto de vectores (1,2,0), (1,00), (0,2,3) linealmente dependiente o independiente?, ¿porqué?

Escribe entonces en el pizarrón el siguiente enunciado:

Teorema 1: si el conjunto de vectores $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$ es linealmente dependiente, entonces existen unos escalares k_1, k_2, ..., k_n, de los cuales al menos uno es diferente de cero, tales que $k_1\mathbf{a_1}+k_2\mathbf{a_2}+\ldots+k_n\mathbf{a_n}=\mathbf{0}$.

Y da una explicación como la siguiente:

En este teorema, como en muchos otros, se pueden distinguir dos partes: la hipótesis, que es la afirmación: "el conjunto de vectores $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$ es linealmente dependiente" y la conclusión, que es la afirmación "existen unos escalares k_1, k_2, ..., k_n, de los cuales al menos uno es diferente de cero, tales que $k_1\mathbf{a_1}+k_2\mathbf{a_2}+\ldots+k_n\mathbf{a_n}=\mathbf{0}$" .

Lo que dice el teorema es que cuando la hipótesis es verdadera, la conclusión también es verdadera.

Demostrar un teorema es hacer un razonamiento para convencer a otros o a nosotros mismos de que lo que dice el teorema es verdad.

Para demostrar un teorema como el anterior, lo que generalmente se hace es partir de la hipótesis y, por medio de una serie de razonamientos, llegar a la conclusión.
He aquí una demostración del teorema 1 en cinco pasos:

1. Supongamos que el conjunto de vectores es $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ es linealmente dependiente.
2. Entonces, al menos uno de ellos, por ejemplo $\mathbf{v_n}$, es una combinación lineal de los restantes, es decir,
3. existen escalares k_1, k_2, ..., k_{n-1} tales que:
$$\mathbf{v_n}=k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+\ldots+k_{n-1}\mathbf{v_{n-1}}$$
4. entonces:
$$k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+\ldots+k_{n-1}\mathbf{v_{n-1}}-\mathbf{v_n}=\mathbf{0}$$

5. que es una igualdad de la forma $k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+\ldots+k_n\mathbf{v_n}=\mathbf{0}$, en la que k_n es distinto de 0 por ser el escalar -1.

El teorema 1 queda demostrado ya que, a partir de la hipótesis de que el conjunto $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ es linealmente dependiente llegamos a la conclusión de que $k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+\ldots+k_n\mathbf{v_n}=\mathbf{0}$.

Cada uno de los pasos o afirmaciones de que consta la demostración debe poderse justificar, por ejemplo, con base en una definición o en algún teorema ya demostrado.

La justificación de cada uno de los cinco pasos de la demostración del teorema 1 es la siguiente:
1. Suponemos verdadera la hipótesis del teorema.
2. Por la definición 2.
3. Por la definición 1.
4. Por las propiedades de las operaciones con vectores.
5. Hacemos notar que el paso 4 es igual a la conclusión del teorema.

A continuación, el profesor explica que si en el teorema 1 se intercambian la hipótesis y la conclusión, se obtiene el siguiente enunciado:

Teorema 2:
Si $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$ es un conjunto de vectores y existen unos escalares k_1, k_2, ..., k_n, de los cuales al menos uno es diferente de cero, tales que $k_1\mathbf{a_1}+k_2\mathbf{a_2}+\ldots+k_n\mathbf{a_n}=\mathbf{0}$, entonces el conjunto de vectores $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$ es linealmente dependiente.

Y escribe su demostración:

1. Sean $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ un conjunto de vectores y los escalares k_1, k_2, ..., k_n tales que $k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+\ldots+k_n\mathbf{v_n}=\mathbf{0}$.

2. Por lo menos uno de los escalares, por ejemplo k_n es igual a cero. Entonces:

$$\left(\frac{k_1}{k_n}\right)v_1+\left(\frac{k_2}{k_n}\right)v_2+\ldots+\left(\frac{k_{n-1}}{k_n}\right)v_{n-1}+v_n=0$$

3. O, lo que es lo mismo:

$$v_n=\left(\frac{-k_1}{k_n}\right)v_1+\left(\frac{-k_2}{k_n}\right)v_2+\ldots+\left(\frac{-k_{n-1}}{k_n}\right)v_{n-1}$$

4. De manera que el conjunto de vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ es linealmente dependiente.

Pide a los alumnos que justifiquen cada uno de los pasos de la demostración del teorema 2:

Explica después que el teorema 1 y el teorema 2 se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema 3:

El conjunto de vectores $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$ es linealmente dependiente, **si y sólo sí** existen unos escalares k_1, k_2, ..., k_n, de los cuales al menos uno es diferente de cero, tales que $k_1\mathbf{a_1}+k_2\mathbf{a_2}+\ldots+k_n\mathbf{a_n}=\mathbf{0}$.

Y explica que:

La expresión "**si y sólo sí**" significa que la hipótesis y la conclusión son intercambiables.
Para demostrar un teorema de este tipo, es necesario demostrar los dos teoremas que encierra.

Entonces pregunta:

¿Cuáles son los dos enunciados que hay que demostrar para demostrar el siguiente enunciado:

El conjunto de vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ es una base del espacio vectorial W si y sólo si para cualquier vector $\mathbf{v}$ de W hay solamente un conjunto de escalares k_1, k_2, ..., k_n tales que $\mathbf{v}=k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+\ldots+k_n\mathbf{v_n}$.

A continuación, el profesor entrega a los alumnos por escrito las siguientes dos definiciones, el teorema 4 y su demostración:

Definición 3.
Se dice que el conjunto de vectores $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_n}$ genera el espacio vectorial V si todo elemento de V es una combinación lineal de dichos vectores.

Definición 4.
Se dice que el conjunto de vectores A es una base del espacio vectorial V si y sólo si:
a) A es linealmente independiente y
b) A genera a V.

Teorema 4:
Si el conjunto de vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ es una base del espacio vectorial W y $\mathbf{v}$ es un vector cualquiera de W, entonces hay sólo un conjunto de escalares k_1, k_2, ..., k_n tales que $\mathbf{v}=k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+\ldots+k_n\mathbf{v_n}$.

(Nota: decir que hay sólo un conjunto de escalares equivale a decir que si hubiera dos conjuntos los dos serían el mismo).

Demostración:

1. Sea el conjunto de vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ una base de W y **v** un vector cualquiera de W**.**
2. **v** es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ **.**
3. Existen escalares k_1, k_2, ..., k_n tales que $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_n\mathbf{v_n}$**.**
4. Supongamos que existe otro conjunto de escalares m_1, m_2, ..., m_n tales que $\mathbf{v} = m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} + \ldots + m_n\mathbf{v_n}$ **.**
5. Restando ambas formas de **v** obtenemos la ecuación:

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_n\mathbf{v_n} - (m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} + \ldots + m_n\mathbf{v_n}) = \mathbf{0}$$

6. o, lo que es lo mismo:

$$(k_1 - m_1)\mathbf{v_1} + (k_2 - m_2)\mathbf{v_2} + \ldots + (k_n - m_n)\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

7. La ecuación sólo puede cumplirse si el escalar que multiplica a cada uno de los vectores es igual a cero.
8. Por lo tanto:

$$k_1 = m_1,\ k_2 = m_2,\ \ldots,\ k_n = m_n$$

Les pide leer y responder las siguientes preguntas individualmente y después cotejar sus respuestas con las de sus compañeros:

1. ¿Genera el conjunto de vectores (1,0) y (0,1) al espacio vectorial R^2?
2. ¿Genera el conjunto de vectores (1,2) y (2,4) al espacio vectorial R^2?
3. ¿Es el conjunto de vectores (1,0) y (0,1) una base del espacio vectorial R^2?
4. ¿Es el conjunto de vectores (1,0), (0,1) y (1,2) una base del espacio vectorial R^2?
5. De acuerdo con el teorema 4, si el conjunto de los vectores (a,b) y (c,d) es una base de R^2 y se tiene que:

$$m(a,b)+n(c,d)=(5,-1) \quad \text{y} \quad s(a,b)+t(c,d)=(5,-1)$$

   ¿Qué podemos afirmar acerca de los escalares m,n,s y t?.

6. ¿Cuál es la hipótesis del teorema 4?
7. ¿Cuál es la conclusión del teorema 4?

Justifique cada uno de los pasos de la demostración del teorema 4.

2. Ejercicio sobre numero de vectores y dependencia lineal.

La finalidad de este ejercicio es ayudar al alumno a desarrollar la habilidad de demostrar teoremas.

Desarrollo: el profesor explica la finalidad del ejercicio y propone a los alumnos el siguiente teorema:

Si el conjunto de vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ es una base del espacio vectorial V, entonces todo conjunto de vectores de V que tenga más de n elementos es linealmente dependiente.

Después, el profesor ayuda a los alumnos a demostrarlo mediante un diálogo como el que se ejemplifica a continuación, en el que las preguntas del profesor indican una estrategia para abordar la demostración pero no aportan lo que los alumnos pueden encontrar por si mismos:

¿Cuál es la hipótesis?
Que el conjunto de vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ es una base del espacio vectorial V
¿Qué significa esto?
Que v_1, v_2, ..., v_n son un conjunto linealmente independiente de vectores que generan V.
¿Cuál es la conclusión?
Que todo conjunto de vectores de V que contenga más de n elementos es linealmente dependiente.
¿Cómo podríamos expresar la conclusión empleando una notación apropiada?.
Que un conjunto cualquiera de p vectores, a1, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_p}$ por ejemplo, en el que p es mayor que n es linealmente dependiente.
Es decir, que se pueden encontrar escalares s_1, s_2, ..., s_p no todos iguales a cero tales que $s_1\mathbf{a_1}+s_2\mathbf{a_2}+\ldots+s_p\mathbf{a_p} = \mathbf{0}$**.**
¿Que relación hay entre la hipótesis y la conclusión?
Podemos escribir cada uno de los p vectores $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_p}$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{a_1}=k_{11}\mathbf{v_1}+k_{12}\mathbf{v_2}+\ldots+k_{1n}\mathbf{v_n}$$
$$\mathbf{a_2}=k_{21}\mathbf{v_1}+k_{22}\mathbf{v_2}+\ldots+k_{2n}\mathbf{v_n}$$
$$\begin{array}{llll} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}$$
$$\mathbf{a_p}=k_{p1}\mathbf{v_1}+k_{p2}\mathbf{v_2}+\ldots+k_{pn}\mathbf{v_n}$$

Tomando esto en cuenta ¿cómo podemos expresar la conclusión?:
Existen escalares s_1, s_2, ..., s_p no todos iguales a cero tales que:

$s_1(k_{11}\mathbf{v_1}+k_{12}\mathbf{v_2}+\ldots+k_{1n}\mathbf{v_n})+s_2(k_{21}\mathbf{v_1}+k_{22}\mathbf{v_2}+\ldots+k_{2n}\mathbf{v_n})+\ldots+s_p(k_{p1}\mathbf{v_1}+k_{p2}\mathbf{v_2}+\ldots+k_{pn}\mathbf{v_n})=\mathbf{0}.$

¿Podemos reagrupar los escalares y los vectores de esta ecuación?:

$$(s_1k_{11}+s_2k_{21}+\ldots+s_pk_{p1})\mathbf{v_1}+(s_1k_{12}+s_2k_{22}+\ldots+s_pk_{p2})\mathbf{v_2}+\ldots$$
$$\ldots+(s_1k_{1n}+s_2k_{2n}+\ldots+s_pk_{pn})\mathbf{v_n}=\mathbf{0}$$

Dado que el conjunto de vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ *es linealmente independiente ¿Qué se desprende de la ecuación anterior?*
Que cada uno de los escalares que multiplican a los vectores debe ser igual a cero, es decir, que:

$$\begin{aligned} &s_1k_{11}+s_2k_{21}\ldots+s_pk_{p1}=0\\ &s_1k_{12}+s_2k_{22}\ldots+s_pk_{p2}=0\\ &\quad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\ &s_1k_{1n}+s_2k_{2n}\ldots+s_pk_{pn}=0 \end{aligned}$$

Este es un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con p incógnitas. Además de la solución trivial $s_1=0$, $s_2=0$, ..., $s_p=0$ ¿tiene alguna otra solución?.

Tiene infinitas soluciones porque el rango de la matriz de coeficientes es necesariamente menor que el número de incógnitas ya que p es mayor que n.

¿Está demostrado el teorema?
Si, porque a partir de la hipótesis hemos concluido que existen escalares s_1, s_2, ..., s_p no todos iguales a cero tales que $s_1\mathbf{a_1}+s_2\mathbf{a_2}+\ldots+s_p\mathbf{a_p}=\mathbf{0}$.

Pide a los alumnos escribir la demostración del teorema con la claridad necesaria para que un compañero que no haya venido a clase pueda entenderla.

El profesor explica que del teorema se puede obtener fácilmente como conclusión un segundo teorema, que se llama por eso corolario del primero:

Si el conjunto de vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ y el conjunto de vectores $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_p}$ son dos bases del espacio vectorial V, entonces n=p.

Pide a los alumnos redactar la demostración del corolario con la claridad necesaria para que un compañero que no haya venido a clase pueda entenderla.

3. Ejercicio sobre potencias y vectores propios de matrices .

La finalidad de este ejercicio es ayudar al alumno a descubrir un teorema, demostrarlo siguiendo una estrategia y finalmente, transferir elementos de la demostración a la demostración de otro teorema similar.

Desarrollo: el profesor pide a los alumnos que estudien y resuelvan en la computadora el documento sobre Potencias y Vectores Propios.
Dicho documento pretende ayudar al alumno a descubrir, por medio de la intuición geométrica, el siguiente teorema:

Sea A una matriz cuadrada estocástica de orden 2, y ***v*** *cualquier vector de* R^2*. Entonces, el vector* A^n**v** *es aproximadamente igual a un valor propio de A si el valor de n es suficientemente grande.*

Una vez que se ha llegado a la formulación del teorema, el profesor puede ayudar a los alumnos a demostrarlo mediante un diálogo como el que se ejemplifica a continuación, en el que las preguntas del profesor indican una estrategia para abordar la demostración pero no aportan lo que los alumnos pueden encontrar por si mismos:

1. ¿A que objetos se refiere el teorema?

   A la matriz A, a la matriz A^n al vector **v** y a un vector propio de la matriz A.

2. ¿Qué sabemos acerca de estos objetos?:

   Que la matriz A es una matriz estocástica y que por ello, <u>tiene un valor propio igual a 1 y otro valor propio positivo pero menor que uno.</u>
   <u>Que dos vectores propios que pertenecen a cada uno de esos dos valores respectivamente son linealmente independientes.</u>
   <u>Que la matriz A^n tiene los mismos vectores propios que A y que sus valores propios son potencias de los valores propios de A.</u>

3. ¿Qué significan estas afirmaciones? (expréselas ahora mediante una notación apropiada)

Que para el escalar 1 y un escalar k mayor que cero pero menor que uno, existen vectores linealmente independientes $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_2}$ tales que

a)- $A\mathbf{e_1}=\mathbf{e_1}$ y $A\mathbf{e_2}=k\mathbf{e_2}$.
b)- $(A^n)\mathbf{e_1}=\mathbf{e_1}$ y $(A^n)\mathbf{e_2}=k^n\,\mathbf{e_2}$.

4. ¿Qué tenemos que demostrar?
Que podemos elegir un valor de n para que $A^n\mathbf{v}$ sea tan parecido a un valor propio de A como se quiera.

5. ¿Qué relación hay entre **v** y los vectores propios de A?.

Dado que los vectores propios $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_2}$ son un conjunto linealmente independiente, <u>un vector cualquiera **v** de R^2 se puede expresar como una combinación lineal de esos dos vectores.</u>

6. ¿Qué significa esta afirmación? (exprésela mediante una notación apropiada).

Que existen escalares c y d tales que:
$\mathbf{v}=c\mathbf{e_1}+d\mathbf{e_2}$

7. ¿Podríamos formular nuevamente lo que tenemos que demostrar, empleando esta información? (expréselo mediante la notación apropiada):

Hay que demostrar que $A^n\,(c\mathbf{e_1}+d\mathbf{e_2})$ es parecido a un vector propio de A para un valor suficientemente grande de n.

8. ¿Que hay que hacer ahora?.
Efectuar las operaciones indicadas en la expresión $A^n\,(c\mathbf{e_1}+d\mathbf{e_2})$. Haciéndolo, encontraremos que:

$$A^n\,\mathbf{v}= c\mathbf{e_1}+ k^n\,d\mathbf{e_2}$$

Puesto que k es menor que uno, k^n tiende a cero cuando n aumenta de valor y, por lo tanto $A^n\,\mathbf{v}$ se aproxima a $c\mathbf{e_1}$ tanto más cuanto mayor sea n.
Como <u>$c\mathbf{e_1}$ es un vector propio de A</u>, el teorema queda demostrado.

9. Revise los pasos de la demostración. ¿Puede justificar cada uno de ellos?.

10. Se dijo que el vector **v** puede escribirse en la forma $\mathbf{v}=c\mathbf{e_1}+d\mathbf{e_2}$. ¿Qué sucede si c=0?.

11. Escriba la demostración en la forma más breve que pueda, pero sin omitir paso alguno importante.

En las respuestas anteriores se han subrayado afirmaciones que requieren también ser demostradas. Corresponde al profesor decidir si deben demostrarse antes o después del ejercicio o simplemente proponerse como postulados.

Después, el profesor los invita a los alumnos a demostrar el siguiente teorema, que es similar al anterior, aunque más general, y sirve de base al Método de potencias, útil para encontrar aproximaciones de los valores propios de algunas matrices:

Hipótesis:
Sea A es una matriz cuadrada de orden n que tiene los n valores propios : $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *a los cuales pertenecen los vectores propios* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$.
Si el valor absoluto de k_1 *es mayor que el valor absoluto de los demás valores propios y los n vectores propios constituyen un conjunto linealmente independiente.*
Conclusión:
*entonces existe un vector **v** diferente de cero, tal que para n suficientemente grande* $(A^n)\mathbf{v}$ *es aproximadamente igual a un vector propio de A.*

4. Ejercicio sobre determinantes.

La finalidad de este ejercicio es ayudar al alumno a darse cuenta de que los razonamientos que hacemos pueden conducirnos a conclusiones falsas cuando son lógicamente incorrectos.

Desarrollo: el profesor explica a los alumnos que algunos de los razonamientos que hacemos tanto en Matemáticas como en otros campos pueden conducirnos a conclusiones falsas porque se basan en afirmaciones falsas. Tal es el caso en el siguiente razonamiento:
"Existe la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ porque toda matriz cuadrada de orden 2 tiene una inversa".

Pero podemos llegar también a una conclusión falsa por razonar de una manera lógicamente incorrecta, como en el siguiente caso:

" Si el vector **a** fuera una combinación lineal de los vectores **b** y **c**, entonces el conjunto de los vectores **a**, **b** y **c** sería linealmente dependiente. Pero sabemos que el vector **a** no es una combinación lineal de los vectores **b** y **c**, por lo tanto, el conjunto de los vectores **a**, **b** y **c** no es linealmente dependiente".

El profesor aclara que un razonamiento lógicamente incorrecto es aquel en el cual aunque las premisas sean verdaderas, la conclusión puede ser falsa, es decir, puede darse un ejemplo de esa forma de razonamiento en el cual las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa.

Pide entonces a los alumnos que primero individualmente y después en pequeños grupos encuentren el motivo por el cual cada uno de los siguientes razonamientos es lógicamente incorrecto:

1. Tomemos dos matrices A y B cualesquiera, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

   Podemos comprobar que el determinante de la matriz A es 11, el determinante de la matriz B es -64 y el determinante de la matriz A+B es -53.
   Por lo tanto, si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, entonces el determinante de la matriz A+B es igual al determinante de la matriz A más el determinante de la matriz B.

2. Sabemos que si una matriz cuadrada de orden n tiene dos renglones iguales, su determinante vale cero.
   Por lo tanto, si el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   vale cero, entonces a=c y b=d.

3. Si A es una matriz cuadrada de orden n y B es su matriz inversa, entonces el producto de sus determinantes es igual a uno.
   Por lo tanto, si B no es la matriz inversa de A, el producto de los determinantes de A y B es distinto de uno.

Estas formas de razonamiento incorrecto pueden darse no sólo en relación con las Matemáticas sino también con otros campos del conocimiento o la actividad humanas. El profesor pide a los estudiantes inventar o recordar ejemplos de esto.

5. Ejercicio sobre valores propios.

La finalidad de este ejercicio es ayudar al alumno a tomar conciencia de su propia actividad en el aprendizaje de las Matemáticas. Esa actividad consiste principalmente en experimentar, entender, juzgar y tomar decisiones. El tomar conciencia de estas operaciones, además del valor que tiene para conocerse a si mismo, puede ser útil para mejorar estrategias o modos de proceder en Matemáticas.

Desarrollo: El profesor pide a los alumnos que individualmente, con el auxilio de la computadora, investiguen si hay o no una relación entre los valores propios de una matriz cuadrada, el determinante de la matriz y los elementos de la diagonal principal de la matriz.

Mientras los alumnos trabajan el profesor observa el modo en que lo hacen y sus actitudes ante la tarea. Cuando uno o varios de los alumnos encuentran las relaciones buscadas el profesor los felicita y después desarrolla en forma de diálogo con el grupo una reflexión como la siguiente:

¿Qué fue lo que sintieron cuando les propuse esta actividad?
Sentí curiosidad, sentí disgusto porque yo esperaba que nos dejaran ir, me sentí obligado a hacerlo, vi la hora que era y sentí mucha hambre, sentí temor de no poderlo hacer.
El profesor hace notar que en la realización de las actividades de aprendizaje como en cualquier experiencia humana, además de los aspectos cognoscitivos hay aspectos afectivos que favorecen o entorpecen el desarrollo de esa actividad.

Después pide a algunos alumnos que no resolvieron el problema que describan sus dificultades y sentimientos en relación con la tarea.
Hecho esto, solicita a los alumnos que resolvieron el problema que describan cuáles fueron las dificultades que enfrentaron, qué cosas les ayudaron a encontrar la solución y cuáles fueron los sentimientos que experimentaron durante este proceso.
El profesor explica que la experiencia nos ofrece los datos, pero que es por la comprensión por la que accedemos al sentido de los datos. En este caso los datos son una serie de números y lo comprendido es la relación entre esos números.
La comprensión o falta de comprensión no se da sólo en Matemáticas, ocurre también en otras ciencias y en la vida ordinaria. ¿Podrían dar ejemplos?.

El profesor continua su explicación señalando que, además de la comprensión, hay la reflexión sobre lo comprendido. En el ejemplo que estamos usando, lo comprendido se puede expresar así:

El producto de los valores característicos de una matriz cuadrada es igual al determinante de la matriz y la suma de esos mismos valores es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz.
¿Podemos estar seguros de que esta afirmación es verdadera para cualquier matriz cuadrada de cualquier orden?. ¿Porqué?. ¿De qué manera podríamos asegurarnos?.
El profesor hace notar que tanto en las Matemáticas como en la vida hay algunas cosas de cuya verdad nos hemos asegurado pero que necesariamente hay muchas otras que aceptamos por la autoridad de los demás. Eso que aceptamos por la autoridad de los demás son las creencias, que pueden ser razonables o no.
¿Podrían dar ejemplos de creencias en Matemáticas y en otros campos?
¿Algo de lo que nos hayamos asegurado personalmente, sea en Matemáticas o en otros campos?. ¿De qué manera nos hemos asegurado?.

Finalmente, el profesor explica que además de experimentar, entender y reflexionar, tomamos decisiones.
Por ejemplo, si en relación con la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

tuviéramos que decidir en 5 minutos y sin el apoyo de una computadora cual de las siguientes dos series de números:
a)- 4.5635, 0.4400, -0.002, -0.999
b)- 4.5605, 0.4394, -0.001, -0.998
es más aproximada a los valores propios de la matriz. ¿Cuál de las dos series elegiríamos?, ¿porqué?.

Una vez discutidas las respuestas de los alumnos a la pregunta anterior, el profesor continua:
¿Podríamos dar ejemplos de situaciones en las cuales las Matemáticas están relacionadas con la toma de decisiones?.
¿Recordamos haber tomado alguna decisión esta semana?. ¿Fue una buena decisión?, ¿Porqué?.

IV. EJERCICIOS DE ACCION.

INTRODUCCION

Además de la reflexión mediante la cual juzgamos si aquello que hemos entendido es verdadero o es falso, existe la reflexión por la cual juzgamos acerca de lo que queremos hacer; es la reflexión práctica, que incluye la deliberación sobre nuestras posibles acciones antes de tomar una decisión.

Por la decisión hacemos que empiece a existir lo que antes no era, por la decisión nos transformamos a nosotros mismos y al mundo que nos rodea.
Nos transformamos a nosotros mismos juzgando nuestro querer y nuestro comportamiento y cambiándolos.
Transformamos el mundo físico y social que nos rodea de diferentes maneras y podemos hacerlo así mejor, o más útil o más bello.
Cuando queremos lo bueno nos ennoblecemos, de lo contrario, nos envilecemos.

En la reflexión práctica podemos encontrar los siguientes tres elementos: la atención al **contexto** en el que se va a tomar la decisión, la consideración de las alternativas o posibilidades entre las que hay que elegir y finalmente, el **juicio** sobre esas alternativas conforme a ciertos **criterios**.
Un elemento esencial en la reflexión práctica es la consideración de las alternativas e imaginar esas alternativas requiere creatividad.
Los siguientes ejercicios tienen la finalidad de contribuir a desarrollar en los estudiantes la creatividad y el hábito de la reflexión relacionados con la toma de decisiones.
En el ejercicio sobre Arte se hace una reflexión también acerca de la apertura a la Trascendencia.

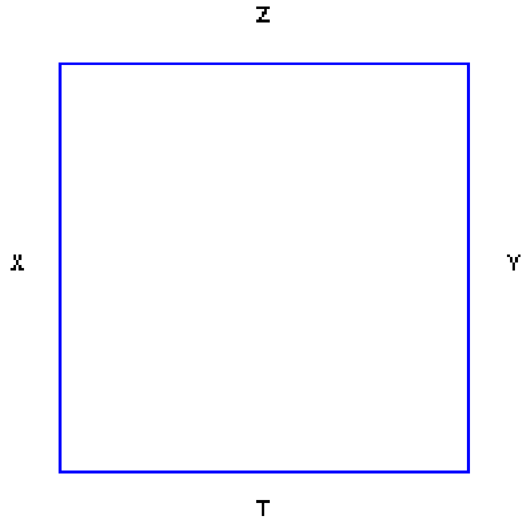
EJERCICIOS

1. Ejercicio sobre matrices ralas.

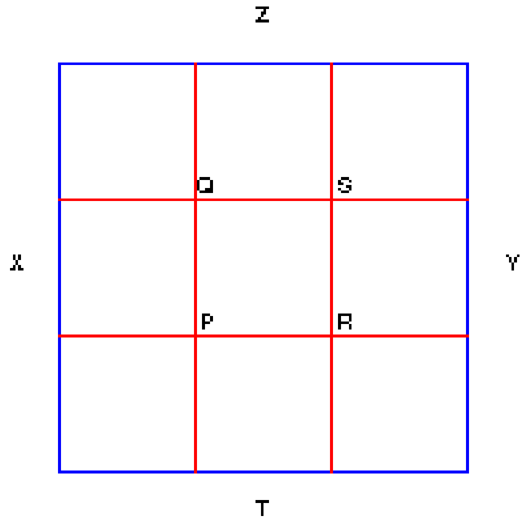
La finalidad de este ejercicio es que los estudiantes desarrollen el hábito de tomar decisiones con base en criterios explícitos y atendiendo al contexto en el que se toma la decisión.

Desarrollo: El profesor propone a los alumnos el siguiente problema para ser resuelto individualmente fuera de clase en una semana:

El dispositivo de control de un proceso farmacéutico utiliza una lamina cuadrada de metal como la que se esquematiza en la figura:



La temperatura a lo largo de cada lado de la lámina es uniforme, pero puede variar con el tiempo dependiendo del desarrollo del proceso.
Por ejemplo, en este momento la temperatura del lado izquierdo puede ser X=30 grados centígrados y la del lado superior puede ser Z=50 grados centígrados pero dentro de 10 minutos pueden ser de X=70 grados y Z=65 grados centígrados .
Una computadora recibe cada minuto los valores X, Y, Z y T que tienen en ese instante cada uno de los lados de la lamina. En cuanto recibe esta información, la computadora debe calcular la distribución de la temperatura sobre la lamina y enviar el resultado a un mecanismo que hace ajustes al proceso.
Para calcular la distribución de la temperatura sobre la lámina el procedimiento que se utiliza es suponer que la lámina se divide por medio de una retícula en n partes iguales y considerar que la temperatura en cada vértice de la retícula es el promedio de las temperaturas de los cuatro vértices más cercanos.
Por ejemplo, si se divide la placa en 9 partes iguales:



la retícula tiene los cuatro vértices interiores P, Q, R y S y la temperatura en el punto P es (T + X + Q + R)/4.
Mientras mayor sea el número de vértices que tenga la retícula, mejor será la estimación de la distribución de la temperatura en la lámina, mejor el control del proceso y, por lo tanto, mayor la calidad y menor el costo de la medicina producida en el proceso.
Compare, por ejemplo, para los mismos valores de X, Y, Z y T la distribución de temperaturas con nueve y con 64 vértices interiores que se ilustran en las figuras 1 y 2 respectivamente:

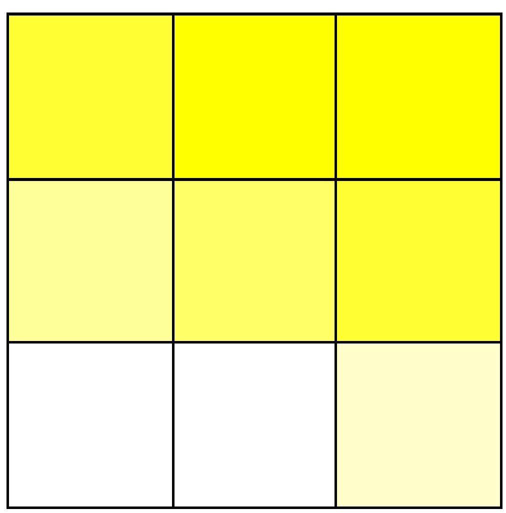


fig. 1

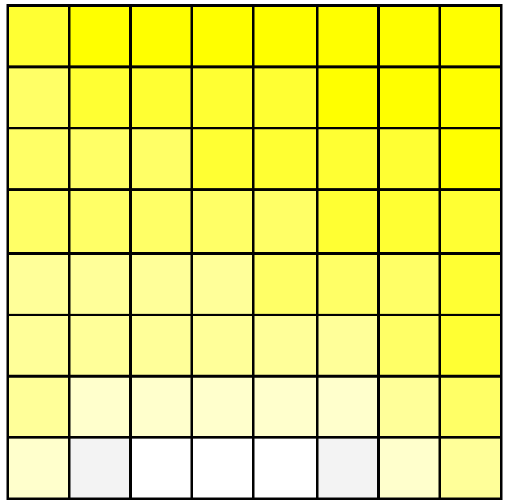


fig. 2

El cálculo realizado en la computadora debe tomar como máximo 55 segundos. La computadora es la misma que esta utilizando usted ahora.

Usted ha sido contratado recientemente y nombrado responsable del control de este proceso. Ello implica tomar las siguientes decisiones:
a)-Establecer el número de vértices interiores en los que se va a basar el cálculo de la distribución de temperaturas.
b)- Elegir el método para calcular la distribución de temperaturas.

Deberá presentarle al gerente de la empresa , dentro de una semana, un texto con su decisión sobre los dos puntos antes mencionados, explicando las alternativas que consideró y los motivos por los que eligió lo que eligió. Además, debe demostrarle en la computadora el desempeño del procedimiento elegido .
Una vez que los alumnos entreguen sus trabajos al profesor, éste puede conducir un diálogo del siguiente tipo, procurando que las preguntas y respuestas surjan de los propios alumnos:

¿Qué es lo que se tenía que decidir?
El número de vértices interiores en los que se va a basar el cálculo de la distribución de temperaturas y el método para calcular la distribución de temperaturas.
¿Cuáles son los criterios con los que vamos a juzgar las distintas alternativas?

La rapidez es uno: el cálculo se debe efectuar en menos de 55 segundos. La exactitud es otro: mientras mayor número de puntos tomemos en cuenta, mejor será la respuesta.
¿Cuáles son las alternativas que han considerado?
A partir de los datos X,Y,Z,T puede hacerse lo siguiente:
a)-Generar un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, donde n es el número de vértices que se han considerado en el interior de la placa.
b)-Probar distintos métodos y programas para resolver el sistema de ecuaciones.
c)-Comparar tiempos de ejecución en la computadora para diferentes métodos y programas..
¿Qué métodos y programas han probado?
-Yo elegí el método de Gauss-Jordan, con el que puedo calcular 25 vértices interiores en 37 segundos, mientras que para hacer lo mismo con el de Gauss-Seidel necesito 269 segundos.
¿Qué equipo y programa utilizó?
-Utilice una performa 475 y el programa Maple V, 4.
Comparo usted dos alternativas y eligió la mejor de acuerdo con los criterios. ¿Alguien probó otro camino?
-Yo, con el mismo equipo y programa elaboré un procedimiento que utiliza la eliminación gaussiana o la eliminación gaussiana con pivotación parcial. Puedo determinar 64 vértices interiores empleando 52 segundos en el cálculo.
Con el mismo equipo y programa encontró usted un procedimiento que es mejor de acuerdo con los criterios...

El diálogo prosigue dando oportunidad a que los alumnos compartan, expliquen y critiquen sus logros en relación con el problema planteado. Ejemplos de procedimientos de computadora relacionados con este problema pueden encontrarse en el documento anexo sobre "Matrices Ralas."

El profesor hace notar que a pesar de que los criterios son los mismos, la decisión puede es diferente según la computadora y el programa empleado, (el contexto). Por otra parte, en un mismo contexto, puede haber grandes diferencias en las opciones elegidas debidas a los conocimientos y la creatividad de cada quién.
¿Qué aportó el diálogo con el grupo?
Corregir errores, percibir distintas opciones e incrementar nuestros conocimiento y nuestras habilidades.
¿Cuál es la mejor solución que podemos dar al problema planteado aprovechando los recursos que tenemos como grupo?...

2. Ejercicio sobre matrices de adyacencia.

La finalidad de este ejercicio es que los estudiantes desarrollen el hábito de tomar decisiones con base en criterios explícitos y atendiendo al contexto.

Desarrollo: El profesor propone a los alumnos el siguiente problema para ser resuelto individualmente fuera de clase en una semana:

Usted trabaja en una agencia de viajes que ofrece dar el mejor servicio al mejor costo y es el responsable de hacer el itinerario para el viaje de un grupo de turistas que partiendo de la ciudad de México debe visitar sólo una vez cada una de las siguientes ciudades Madrid, Berlín, Roma, Londres, Washington, Ottawa, Guatemala y regresar después a la ciudad de México. Las distancias en kilómetros entre las ciudades mencionadas están dadas en la siguiente tabla:

	México	**Madrid**	**Berlín**	**Roma**	**Londres**	**Washington**	**Ottawa**	**Guatemala**
México	0	9070	9730	10250	8930	3040	3610	1070
Madrid	9070	0	1870	1370	1260	6080	5690	8680
Berlín	9730	1870	0	1180	930	6710	6130	9620
Roma	10250	1370	1180	0	1440	7220	6730	9950
Londres	8930	1260	930	1440	0	5890	5360	8750
Washington	3040	6080	6710	7220	5890	0	730	3000
Ottawa	3610	5690	6130	6730	5360	730	0	3690
Guatemala	1070	8680	9620	9950	8750	3000	3690	0

(Fuente: "Mapamundi" de la Macintosh).

Mientras mayor es la distancia más costoso es el viaje.
Por otra parte, como resultado de encuestas hechas a numerosos clientes que han viajado anteriormente se sabe que su grado de satisfacción con el servicio de transporte entre cada dos ciudades es el que se indica en la siguiente tabla:

	México	**Madrid**	**Berlín**	**Roma**	**Londres**	**Washington**	**Ottawa**	**Guatemala**
México	0	.96	.93	.87	.92	.89	.88	.91

Madrid	,96	0	.87	.90	.92	.86	.93	.89
Berlín	.93	.87	0	.84	.89	.92	.91	.88
Roma	.87	.90	.84	0	.95	.90	.87	.92
Londres	.92	.92	.89	.95	0	.94	.93	.90
Washington	.89	.86	.92	.90	.94	0	.89	.91
Ottawa	.88	.93	.91	.87	.93	.89	0	.87
Guatemala	.91	.89	.88	.92	.90	.91	.87	0

En la que .87, por ejemplo, indica que el 87% de los encuestados dijeron estar satisfechos con el servicio.

Presente usted un documento para el director de la agencia en el que explique cuál es el itinerario que elige usted para el grupo y porqué.

Cómo resultado del ejercicio se espera que los estudiantes desarrollen procedimientos más o menos eficientes para encontrar los mejores recorridos y que dado que el recorrido que es bueno de acuerdo con un criterio puede no ser el mejor de acuerdo con otro criterio , ponderen los criterios para llegar a una solución y vean la necesidad de tener información sobre el contexto para efectuar dicha ponderación.

Una vez que los alumnos entreguen sus trabajos al profesor, éste puede conducir un diálogo encaminado a que los alumnos comparen las diferentes soluciones y las valoren desde el punto de vista de la eficiencia de los procedimientos empleados para encontrarlas así como desde el punto de vista de valores tales como la veracidad, el servicio y el precio justo.

Para resolver este problema que se basa en el ya famoso "problema del agente viajero" es posible que los alumnos inventen procedimientos tales como el "algoritmo del vecino más cercano". El profesor puede hacer notar que este tipo de algoritmos no siempre encuentran el mejor camino pero que hasta ahora son indispensables para abordar el problema a medida que el número de ciudades crece, ya que aún la computadora más rápida que hay necesitaría miles de millones de años para revisar todos los caminos posibles y encontrar así la ruta más corta entre 100 ciudades, por ejemplo.

Por otra parte, una forma de calcular la distancia recorrida en un itinerario es multiplicar la matriz de distancias por la matriz de adyacencia de la red o grafo de ese itinerario. La distancia recorrida es entonces igual a la traza de la matriz resultante. El maestro puede hacer notar que algunas de las potencias de tales matrices de adyacencia son también itinerarios que recorren sólo una vez cada una de las ciudades.

Algunos procedimientos de computadora relacionados con este ejercicio se pueden encontrar en el documento anexo sobre "Matrices de Adyacencia".

3. Ejercicio de programacion lineal.

La finalidad de este ejercicio es que los estudiantes desarrollen el hábito de tomar decisiones con base en criterios explícitos y atendiendo al contexto en el que se toma la decisión.

Desarrollo: El profesor plantea a los alumnos el siguiente problema y les pide que trabajando en quipos de tres propongan soluciones al mismo:

Una comunidad campesina dispone de 150 parcelas en las que ha cultivado tradicionalmente maíz para su propio consumo.
La comunidad está considerando ahora la posibilidad de destinar algunas parcelas a sembrar también soya, trigo o cebada.
Para sembrar maíz en una parcela es necesario invertir 80000 pesos y dedicar 800 días de mano de obra, obteniéndose un provecho de 27000 pesos.
Para sembrar soya en una parcela es necesario invertir 96000 pesos y dedicar 800 días de mano de obra, obteniéndose un provecho de 71200 pesos.
Para sembrar trigo en una parcela es necesario invertir 56000 pesos y dedicar 1000 días de mano de obra, obteniéndose un provecho de 39500 pesos.
Para sembrar cebada en una parcela es necesario invertir 30000 pesos y dedicar 900 días de mano de obra, obteniéndose un provecho de 15000 pesos.
Los provechos antes mencionados se dan en condiciones óptimas de clima, pero la experiencia ha mostrado que en esta región suele perderse el 5% de la cosecha de maíz y los agrónomos estiman que puede malograrse el 40% de la de soya, el 25% de la de trigo y el 10% de la de cebada.
La comunidad puede conseguir hasta 11000000 pesos para invertirlos y puede dedicar hasta 130000 días de mano de obra a las labores agrícolas. Está mano de obra es la de las propias familias de la comunidad, cuyos miembros se sienten orgullosos de cultivar la tierra, sobre todo si es la de su propia parcela.
La comunidad obtiene el dinero para invertir de una institución financiera que le cobra el 6% sobre el dinero prestado.

La comunidad requiere para su propio consumo, sembrar al menos la tercera parte de las parcelas con maíz.
Si la comunidad está considerando ahora la posibilidad de sembrar otras semillas es con la esperanza de obtener excedentes que destinaría al ahorro para reducir así su dependencia con respecto a la institución financiera.
Usted es una persona respetada por la comunidad y se le pide su opinión sobre el asunto.

En una primera fase, el profesor aclara las dudas que puedan surgir con respecto al enunciado del problema y al tipo de solución que se busca. El objetivo en esta fase es que los alumnos lleguen a una formulación clara del problema planteado, como por ejemplo: voy a decir cuál es el número de parcelas que deben sembrarse con cada semilla para obtener la mayor ganancia posible después de pagarle a la institución financiera el préstamo y los intereses. Si los alumnos no lo descubren por si mismos, el profesor les hace notar que la situación se puede representar algebraicamente mediante ecuaciones y desigualdades lineales. Les explica que es el tipo de problema que se puede abordar mediante un método llamado Programación Lineal.
Solicita que los cada estudiante elabore por escrito, fuera de clase, una solución al problema, para ser discutida en grupo una semana después. Indica a los alumnos los textos en los que pueden estudiar programación lineal y les ofrece su asesoría al respecto.
Una semana después, el profesor recoge el escrito pedido, y promueve la discusión de los resultados obtenidos por los alumnos de tal manera que los alumnos perciban que ya en la forma de plantear las ecuaciones y las desigualdades para la solución del problema están influyendo los valores, y que según el planteamiento hay distintas soluciones, mismas que debemos revisar no sólo desde el punto de vista algebraico sino también desde el punto de vista del bien del ser humano.

Un procedimiento de computadora relacionado con este ejercicio se puede encontrar en el documento anexo sobre " Programación Lineal ".

4. Ejercicio sobre juegos matriciales.

La finalidad de este ejercicio es que los estudiantes desarrollen el hábito de tomar decisiones con base en criterios explícitos y atendiendo al contexto en el que se toma la decisión.

Desarrollo: El profesor plantea a los alumnos el siguiente problema y les pide que trabajando en quipos de tres propongan soluciones al mismo:

Para la elección del diputado por un distrito, dos partidos políticos, el A y el B pueden proponer a los electores cuatro tipos de candidato que

son, respectivamente, el firme y expresivo, el indulgente y expresivo, el indulgente e impasible y el firme e impasible.
Al elegir a su candidato cada partido desconoce el candidato que propondrá el otro partido. Los votos que gane un partido los pierde el otro.
Cada partido cuenta con los votos de sus partidarios, pero quiere ganar los votos de los ciudadanos que aún están indecisos. La opinión de algunos politólogos sobre el porcentaje de votos de indecisos o indiferentes que podría ganar el partido A según el tipo de candidato que elija y el tipo de candidato que elija el partido B está dada en la siguiente tabla:

	Tipo I	**Tipo II**	**Tipo III**	**Tipo IV**
Tipo I	20	50	40	30
Tipo II	40	-30	60	20
Tipo III	30	70	-10	0
Tipo IV	10	40	30	50

En la que los renglones indican el tipo de candidato elegido por el partido A y las columnas el tipo de candidato elegido por el partido B y los números en las casillas representan porcentajes de votos. Por ejemplo: si el partido A lanza un candidato del tipo III y el partido B lanza un candidato del tipo II, entonces el partido A ganará 70% de los votos de los indecisos.
(Los cuadros de la tabla sean llenados con datos de una encuesta de preferencias de personalidad política realizada entre los propios estudiantes del grupo).

Los dos partidos van a elegir candidato a diputado por cada uno de 300 distritos electorales, en las mismas condiciones antes mencionadas. Si usted es partidario del partido A ¿qué le aconsejaría hacer para elegir a sus 300 candidatos?. ¿Porqué?.

En un primer momento, el profesor aclara las dudas que puedan surgir con respecto al enunciado del problema y al tipo de solución que se busca. El objetivo inicial es que los alumnos lleguen a una formulación clara del problema planteado, como por ejemplo: ¿cuál es el tipo de candidato que hay que elegir en cada uno de los 300 distritos para ganar el mayor porcentaje posible de votos de indecisos?.
Después, el profesor invita a los alumnos a pensar en una situación similar pero más sencilla, como puede ser la siguiente:
Juan y Pedro escriben cada uno en un papel "A" o "B". Si Juan escribe "A" y Pedro escribe también "A", entonces Juan le paga 100 puntos a Pedro, si Juan escribe "A" y Pedro escribe "B", entonces Pedro le paga 50 puntos a Juan, si Juan escribe "B" y Pedro escribe también "B", entonces ninguno de los dos gana o pierde, finalmente, si Juan escribe

"B" y Pedro escribe también "B", entonces Juan le paga 500 puntos a Pedro. La situación se puede representar por medio de la siguiente matriz:

	A	**B**
A	-100	50
B	0	-500

El profesor explica entonces que el problema planteado es del tipo de los que se estudian en la teoría matemática de juegos .
Solicita que los cada estudiante elabore por escrito, fuera de clase, una solución al problema, para ser discutida en grupo una semana después.
Indica a los alumnos los textos en los que pueden estudiar elementos de teoría de juegos y les ofrece su asesoría al respecto.
Una semana después, el profesor recoge el escrito pedido, y promueve la discusión de los resultados obtenidos por los alumnos de tal manera que se comparen los procedimientos empleados y se establezca cuál es el mejor. Hace notar la relación que hay entre la Teoría de Juegos y la Programación Lineal.

Un procedimiento de computadora relacionado con este ejercicio se puede encontrar en el documento anexo sobre " Juego Matricial ".

5. Ejercicio sobre brazo robotico.

La finalidad de este ejercicio es que el alumno desarrolle su creatividad en el diseño de mecanismos relacionados con la representación matricial de movimientos.

Desarrollo: el profesor explica a los alumnos que una de las vías para incrementar la productividad y la calidad en la industria es automatizar tareas con base en computadoras. Es verdad que desde hace muchos años se han automatizado tareas en la industria por medio de máquinas, pero se trataba de máquinas especializadas en realizar sólo ciertas operaciones. Lo que aportan de nuevo los robots industriales, (que son máquinas basadas en computadoras), es que pueden ser programados para efectuar diferentes tareas. (Cfr. Fu, González, Lee, 1887, p.1).
Uno de los aspectos esenciales del diseño de un robot es el que tiene que ver con el movimiento de sus elementos, para lo cual son de utilidad las matrices (¿para qué?).

El brazo de un robot está compuesto de elementos y de articulaciones.

Si quisiéramos, por ejemplo, diseñar un brazo que trazara círculos de radio 1 en el plano xy alrededor del origen , podríamos colocar una articulación apoyada en el origen en torno a la cual girara un elemento (brazo) de longitud 1.

1. Haga un dibujo en computadora en el que se muestre el brazo antes descrito. El procedimiento de computadora debe permitirle mostrar el brazo en cualquier posición en torno al origen que se le pida, como por ejemplo, que la extremidad del brazo esté en el punto (x,y), donde (x,y) es un punto cualquiera del círculo con radio de un decímetro y centro en el origen.

2. Diseñe un brazo que pueda trazar círculos en el plano xy con cualquier radio entre 0.5 y 1.5 decímetros alrededor del origen. El brazo puede contener más de un elemento y más de una articulación, pero debe apoyarse en una articulación situada en el origen.
   Debe usted presentar un dibujo del brazo en la computadora y un procedimiento que le permita mostrar el brazo en cualquier posición que se le pida, como por ejemplo, que la extremidad del brazo esté en el punto (x,y), donde (x,y) es un punto cualquiera del círculo de radio k con centro en el origen.

3. Diseñe un brazo que pueda trazar elipses en el plano xy, con centro en el origen y cuyos ejes mayor y menor pueden variar entre 1 y 3 decímetros. El brazo puede contener más de un elemento y más de una articulación, pero debe apoyarse en una articulación situada en el origen.
   Debe usted presentar un dibujo del brazo en la computadora y un procedimiento que le permita mostrar el brazo en cualquier posición que se le pida, como por ejemplo, que la extremidad del brazo esté en el punto (x,y), donde (x,y) es un punto cualquiera de la elipse con centro en el origen , eje mayor igual a 2a y eje menor igual a 2b.

4. Enterado de la calidad de sus diseños anteriores, el gerente de una empresa le solicita diseñar un brazo apoyado en una articulación que pueda apretar tornillos situados en cualquier posición dentro de un círculo sobre el plano xy con centro en el origen y cuatro decímetros de radio. El elemento que se encuentra en la extremidad del brazo es un destornillador y, para apretar un tornillo, debe tocar la cabeza del tornillo y ser paralelo al resto del tornillo.
   Debe usted presentar un dibujo del brazo en la computadora y un procedimiento que le permita mostrar el brazo en cualquier posición que se le pida, como por ejemplo, apretando un tornillo cuya cabeza está en el punto (x,y) y cuyo otro extremo está en el punto (x+d,y+e).

Una vez que los alumnos hayan realizado el trabajo se harán comentarios sobre las diferencias observadas tanto en la solución de los problemas como en la presentación de los resultados.

Un ejemplo relacionado con el tipo de resultado que se espera en este ejercicio se encuentra en el documento " Brazo Robótico", que se anexa.

6. Ejercicio sobre arte.

La finalidad de este ejercicio es que los estudiantes desarrollen su capacidad de disfrutar de la belleza en relación con las Matemáticas.

Desarrollo: el profesor les dice a los alumnos que existe una relación entre belleza y Matemáticas. Pregunta a los alumnos si alguna de las figuras que se han utilizado en esta o en otras clases de Matemáticas les ha parecido agradable por su forma o colorido, independientemente de su utilidad para la comprensión de los conceptos.
Una vez que los alumnos han indicado las figuras que han sido más de su agrado, el profesor pregunta qué es lo que las hace agradables. Probablemente algunos dirán que su simetría, o la proporción que hay entre sus partes o la combinación de sus colores.
El profesor confirma sus opiniones y explica que al hablar de la belleza, el teólogo y filósofo medieval Santo Tomás de Aquino definió lo bello como "aquello que visto, agrada". El mismo santo enseñó que los sentidos se deleitan en las cosas debidamente proporcionadas, y por debidamente proporcionadas podemos entender cualidades tales como la simetría, o la justa proporción entre las partes o la adecuada combinación de colores. (Ver S.Th. I, 5, a. 4).

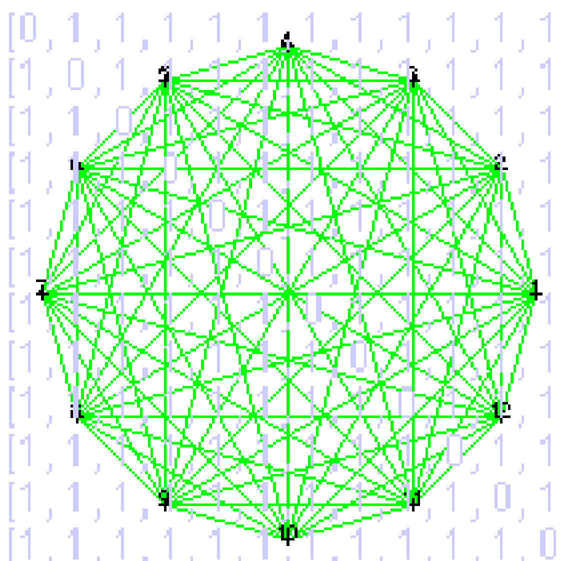
Como ustedes lo señalan, en nuestro estudio de las Matemáticas hemos encontrado figuras bellas, aún cuando tal vez no hemos puesto mucha atención en el deleite que nos producen por estar interesados más bien en comprender los conceptos relacionados con esas figuras. Se trata ahora de liberar los sentidos de este servicio a la intelección para gozarse en el resplandor de la forma. Se trata de pasar del esquema intelectual al esquema estético de la experiencia humana.

Para concretar este propósito el profesor invita a los alumnos a elaborar individualmente, dos o tres figuras para la portada de un libro de Algebra, utilizando para ello formas visuales relacionadas con los conceptos vistos en el curso. Posteriormente estas figuras serán presentadas en una "exposición" para ser apreciadas por el grupo y recibir así el aplauso que merecen.

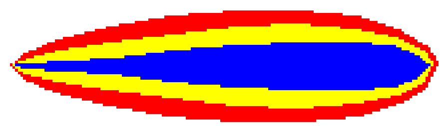
Procedimientos de computadora relacionado con este ejercicio se pueden encontrar en el documento anexo sobre "Arte ".

Como ejemplo del tipo de resultados esperados se proponen aquí las siguientes figuras:

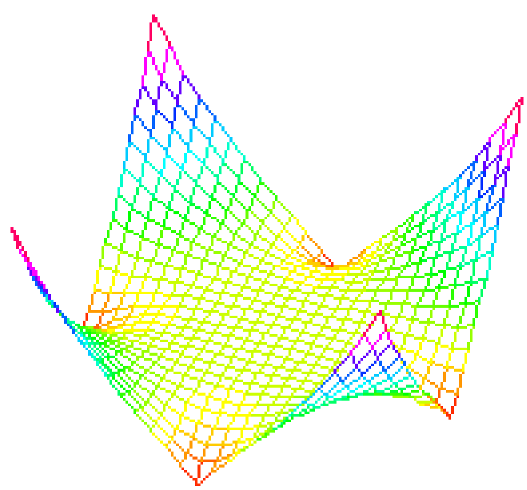
1. Grafo de 12 vértices y su matriz de adyacencia:



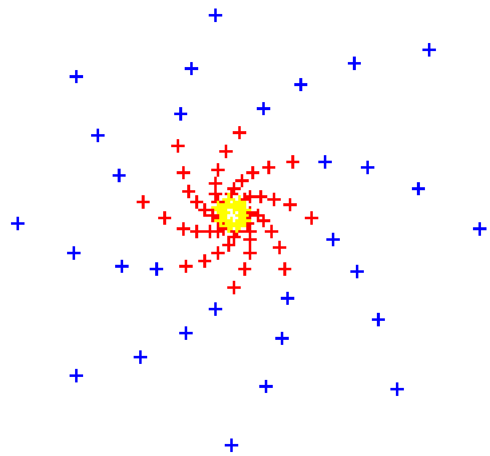
2. Ala de Sukovski.



3. Superficie de módulos de un polinomio



4. Potencias de un número complejo



Al terminar la exposición, el profesor puede invitar a los alumnos a reflexionar nuevamente sobre las actividades que han realizado en el aprendizaje de las Matemáticas.
Esas actividades consisten principalmente en experimentar, entender, juzgar y tomar decisiones.

Los ejercicios que hemos realizado en esta sección han implicado la toma de decisiones. Hemos visto que la toma de decisiones está basada en criterios y los criterios en valores. Por nuestras decisiones podemos cambiar al mundo y a nosotros mismos, haciéndonos mejores o peores personas.
Las actividades que hemos realizado en el aprendizaje de las Matemáticas son también actividades que realizamos en otros campos de nuestra vida. Podemos comprobar que tenemos una tendencia incontenible a entender el significado de la experiencia, a distinguir lo que existe de lo que no existe, y a elegir el bien y la belleza. Nos preguntamos entonces ¿cuál es el fundamento último de estas tendencias indestructibles?.
¿Podríamos entender el significado de la experiencia si el universo no tuviera un Fundamento Inteligente?, ¿Podrían existir los seres que hoy son y mañana no si no hay un Ser Necesario?, ¿Valdría la pena luchar por el bien si el Fundamento Ultimo de lo real no fuera bueno?. Todas estas preguntas, relacionadas con nuestros dinamismo más profundos, son preguntas por Dios.

V. EJERCICIOS DE EVALUACION.

INTRODUCCION

Evaluar el aprendizaje del alumno es juzgar dicho aprendizaje con base en evidencias y conforme a ciertos criterios.

En cuanto al propósito de la evaluación podemos considerar que es diagnóstica cuando sirve para contextualizar la enseñanza, formativa cuando ofrece retroalimentación que apoya el aprendizaje y final cuando verifica el logro de los objetivos de aprendizaje una vez que ha terminado el curso.

La evaluación del aprendizaje del alumno a lo largo del curso de Algebra Superior I se podría realizar de la siguiente manera: al terminar cada uno de los 10 temas de la materia, el alumno presentaría un examen sobre el tema, al concluir dos o tres temas de la materia, el alumno presentaría un examen parcial sobre esos temas y al concluir el curso, el alumno presentaría un examen global sobre todo el contenido del curso. Se tomaría en cuenta también el portafolios del alumno.

La idea es que al presentar el examen correspondiente a un tema, el alumno puede detectar sus fortalezas y remediar oportunamente sus debilidades, de manera que al concluir dos o tres temas esté mejor preparado para presentar el examen parcial sobre esos temas. Puede también remediar las deficiencias detectadas en los exámenes parciales antes de presentar el examen global.

El portafolios es una colección de textos cuya finalidad principal es ayudar al estudiante a reflexionar sobre su progreso en la materia.
Incluye comentarios y propósitos del alumno basados en la revisión de sus exámenes y en la evaluación de su trabajo en equipo.
Incluye también una selección de los trabajos solicitados por el profesor o propuestos por el propio alumno. La comparación de estos trabajos a lo largo del curso ofrece evidencia sobre los logros del estudiante.

Para efectos de la calificación del alumno en el curso se pueden tomar en cuenta los resultados del examen global y de cuatro exámenes parciales. Si el promedio de estos exámenes es aprobatorio, se podrán tomar en cuenta hasta para un 20% de la calificación final los trabajos del portafolios.

En este capítulo puede encontrarse un examen global, que cubre toda la materia del curso y un examen parcial sobre Matrices y Determinantes. Hay también un examen sobre el tema de Matrices y algunos instrumentos y sugerencias para el portafolios del alumno.

El ejemplo de examen global se ha elaborado tomando en cuenta los objetivos últimos del curso: que el alumno desarrolle su habilidad de experimentar, comprender, reflexionar y actuar en relación con el contenido del curso y, particularmente, que pueda reconocer y resolver más fácilmente los problemas de tipo algebraico que se le presenten en el resto de sus estudios y en su actividad profesional.

Para ello, se ha procurado que las preguntas del examen abarquen lo esencial del contenido del curso, que relacionen entre sí sus diferentes elementos y que requieran las operaciones de recordar, experimentar, comprender, reflexionar y actuar.

El examen parcial tiene la misma finalidad, pero abarca sólo el contenido de dos temas del curso.

El examen de tema abarcan sólo el contenido de un tema del curso, de una manera más analítica que sintética, con el fin de que el alumno y el profesor pueda detectar más fácilmente los puntos que requieren un esfuerzo de aprendizaje adicional.

EJERCICIOS.

1. Examen global sobre Algebra Lineal.

La finalidad de este examen es que el alumno y el profesor tengan elementos para juzgar si el aprendizaje del estudiante es suficiente para acreditar la materia.

El aprendizaje consiste en el desarrollo de la capacidad de efectuar ciertas operaciones con respecto a cierto contenido.

En cuanto al contenido de este examen, cabe notar que el Algebra tiene como problema originario la solución de ecuaciones y el Algebra Lineal la solución de ecuaciones lineales. Los determinantes y las matrices se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Desde otro punto de vista estos sistemas se pueden considerar como funciones llamadas transformaciones lineales. Una transformación lineal es una función de un espacio vectorial en otro espacio vectorial. Dos de los elementos que pertenecen a esas transformaciones y las caracterizan son los valores propios y los vectores propios. Entre las aplicaciones importantes del Algebra Lineal están, además de la solución se sistemas de ecuaciones lineales, la programación lineal y la teoría de juegos, la regresión lineal y la solución de ecuaciones diferenciales.

En cuanto a las operaciones que el alumno debe efectuar con respecto a este contenido son definir conceptos, aplicar procedimientos, demostrar teoremas y resolver problemas, así como juzgar conforme a criterios y aprender por medio de la lectura.

Se espera que tanto el contenido como las operaciones le sean familiares al estudiante por el estudio y la práctica a lo largo del curso.

Desarrollo: el profesor solicita a los alumnos resolver individualmente el conjunto de preguntas aclarándoles que se trata de el examen global.

Esté examen les permitirá al maestro y al propio alumno darse cuenta del grado en que el estudiante ha o no logrado los objetivos del curso. El profesor recuerda a los alumnos que el resultado de este examen tiene peso en la calificación final. Les recuerda también que no es el único elemento de dicha calificación, sino que se tomarán también en cuenta los exámenes parciales y algunos de los trabajos del portafolios del alumno.

El examen puede resolverse con el auxilio de la computadora y para la pregunta G es recomendable además consultar un texto de Algebra Lineal, ya que se trata de evaluar la capacidad de aprender por medio de la lectura.
Para que una respuesta sea calificada como correcta es necesario que responda verdaderamente a la pregunta y que se obtenga por medio de un procedimiento adecuado.

Tanto las preguntas del examen como el tipo de respuestas que se espera del alumno se encuentran en el documento intitulado "Examen de Algebra Lineal" que se anexa.

2. Examen parcial sobre matrices y determinantes.

La finalidad de este examen es que el alumno y el profesor tengan elementos para juzgar si el aprendizaje del estudiante es suficiente para acreditar la materia.

El contenido de este examen son las matrices y los determinantes. En cuanto a las operaciones que el alumno debe efectuar con respecto a este contenido son definir conceptos, aplicar procedimientos, demostrar teoremas y resolver problemas, así como juzgar conforme a criterios y aprender por medio de la lectura.

Se espera que tanto el contenido como las operaciones le sean familiares al estudiante por el estudio y la práctica en las primeras sesiones del curso.

Desarrollo: el profesor solicita a los alumnos resolver individualmente el siguiente conjunto de preguntas aclarándoles que se trata de un examen parcial. Esté examen les permitirá al maestro y al propio alumno darse cuenta del grado en que el esrudiante ha o no logrado los objetivos de estos dos temas. El profesor recuerda a los alumnos que el resultado de este examen tiene peso en la calificación final. Les recuerda también que no es el único elemento de dicha calificación, sino que se tomarán también en cuenta otros exámenes parciales, el examen final y algunos de los trabajos del portafolios del alumno.

El examen puede resolverse con el auxilio de la computadora y para la pregunta G es recomendable además consultar un texto de Algebra Lineal, ya que se trata de evaluar la capacidad de aprender por medio de la lectura.
Para que una respuesta sea calificada como correcta es necesario que responda verdaderamente a la pregunta y que se obtenga por medio de un procedimiento adecuado.

El examen, una vez calificado por el profesor, deberá ser devuelto lo antes posible a los alumnos, con el fin de que puedan beneficiarse de la reflexión sobre los resultados obtenidos.

Tanto las preguntas del examen como el tipo de respuestas que se espera del alumno se encuentran en el documento intitulado "Examen Parcial sobre matrices y determinantes", que se anexa.

3. Examen sobre el tema de matrices.

La finalidad de este examen es que el profesor y el alumno puedan juzgar el aprendizaje del estudiante con el fin de detectar sus deficiencias y remediarlas oportunamente.

El contenido de este examen son las matrices. En cuanto a las operaciones que el alumno debe efectuar con respecto a este contenido son definir conceptos, aplicar procedimientos, demostrar teoremas y resolver problemas, así como juzgar conforme a criterios y aprender por medio de la lectura.

Se espera que tanto el contenido como las operaciones le sean familiares al estudiante por el estudio y la práctica en las primeras sesiones del curso.

Desarrollo: el profesor solicita a los alumnos resolver individualmente el siguiente conjunto de preguntas aclarándoles que se trata de un examen sobre el tema de matrices. Esté examen les permitirá al maestro y al propio alumno darse cuenta del grado en que el estudiante ha o no logrado los objetivos de este tema y remediar oportunamente las deficiencias que encuentren. El profesor recuerda a los alumnos que el resultado de este examen no tiene peso en la calificación final.

El examen debe resolverse sin utilizar computadora o calculadora y para la pregunta H es recomendable consultar un texto de Algebra Lineal, ya que se trata de evaluar la capacidad de aprender por medio de la lectura.

Para que una respuesta sea calificada como correcta es necesario que responda verdaderamente a la pregunta y que se obtenga por medio de un procedimiento adecuado.

El examen podrá ser calificado por el profesor o inmediatamente por los propios estudiantes, con la orientación del profesor, de tal manera que puedan beneficiarse de la reflexión sobre los resultados obtenidos.

A. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

a)-¿Cuáles son los vectores renglón de la matriz A?

R. Son los vectores (1, 2, 5) y (3, 4 , 7).

b)-¿Cuáles son los vectores columna de la matriz A?

R. Son los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c)-¿Cuál es el orden de la matriz A?

R. Dado que tiene dos renglones y tres columnas su orden es dos por tres.

d)-¿Cuáles son los elementos A_{12}, A_{21} y A_{13} de la matriz A?.

R. A_{12} es 2, A_{21} es 3 y A_{13} es 5.

e)-¿Cuáles son los menores M_{12} y M_{23} de la matriz A?

R. M_{12} es (3, 7) y M_{23} es   (1, 2)

B. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a)-Escriba la matriz A + B .

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

b)-Escriba la matriz A - B .

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

c)-Escriba la matriz 3A .

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 9 & 12 & 21 \end{pmatrix}$$

d)-Encuentre la matriz C tal que A + C = A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e)-Encuentre la matriz D tal que A - D =3B.

$$D = A - 3B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 20 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

C. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\ \text{y}\ \ F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

a)-Encuentre el producto EB

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 10 & 17 & -9 \end{pmatrix}$$

b)-Encuentre el producto (A + B)F

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 24 \\ 50 & -47 & 110 \end{pmatrix}$$

c)-Encuentre una matriz G tal que FG=F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)-Encuentre una matriz H tal que (EH)E = E.

$$\begin{pmatrix} \frac{-4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

e)-Encuentre una matriz J tal que FJ=3F.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

D. Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera de orden 2 cuyos elementos son números reales y k es cualquier número real, demuestre que A + B = B + A:

R. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{g} & \mathrm{h} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{B} + \mathrm{A} = \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix}$$

Para que dos matrices sean iguales es necesario que sus elementos correspondientes sean iguales. Los elementos de las matrices A y B son números reales y por lo tanto su suma es conmutativa. En consecuencia, los elementos correspondientes de las matrices A+B y B+A son iguales y por lo tanto las matrices A+B y B+A son iguales.

E. Considere la siguiente matriz:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a)-Escriba la matriz transpuesta de la matriz A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b)-Escriba la matriz inversa de la matriz A.

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

c)-¿Es A una matriz simétrica?, ¿Porqué?.

R. No, porque no es igual a su transpuesta.

d)-Escriba la inversa de la matriz A como un producto de matrices elementales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e)-Encuentre A^2 - 2A

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

f)-¿Es A una matriz singular?. ¿Porqué?.

R. No es una matriz singular, porque tiene inversa.

F. Demuestre que si A, B ,C y D son matrices cuadradas de orden n tales que B es la matriz inversa de C y A = CDB, entonces BAC = D.

R. Demostración:

A = CDB (hipótesis)
BA = BCDB (multiplicando por B ambos miembros)
BA = DB (BC es la identidad)
BAC = DBC (multiplicando por C ambos miembros)
BAC = D. (BC es la identidad)

G. Escriba el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x + 7y &= 1 \end{aligned}$$

en forma matricial y resuélvalo utilizando el método de la matriz inversa.

R. El sistema, escrito en forma matricial es:

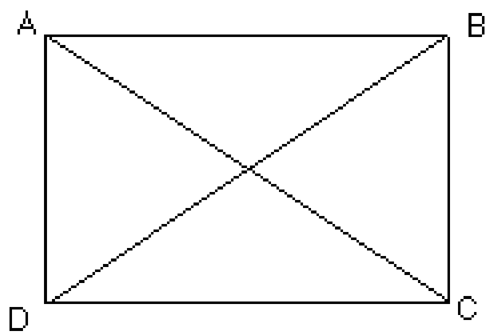
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es el producto de la inversa de la matriz de coeficientes del sistema por el vector de términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -11 \end{pmatrix}$$

H. Se desea instalar una red de comunicación telefónica entre cuatro poblaciones: A, B, C y D. Establecer la comunicación entre dos poblaciones tiene un costo. Con el fin de reducir costos se puede establecer la comunicación indirecta: por ejemplo, si A y B están comunicadas y B y D están comunicadas también, entonces A y D se pueden comunicar por medio de B. Encuentre la matriz de adyacencia de

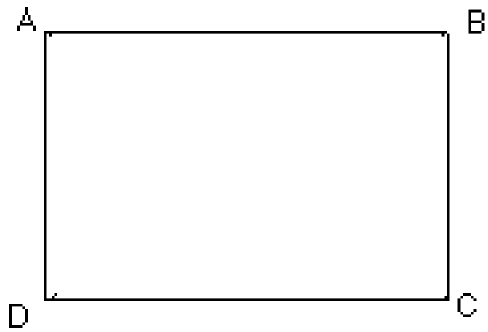
a)-La red de comunicación directa entre las cuatro poblaciones.



R. La matriz de adyacencia correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)-Una red más económica (se permite la comunicación indirecta entre dos poblaciones a través de otra población)



R. La matriz de adyacencia correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I. Un investigador hace una encuesta el 10 de enero y encuentra que en una muestra de 120 personas 20 padecen una enfermedad viral. Una semana después, 12 de las 20 personas enfermas se han aliviado y 20 de las sanas han contraido la enfermedad. De continuar la tendencia observada en esa semana ¿Cuántas personas de la muestra padecerán la enfermedad tres semanas después del 10 de enero?.

R La tendencia observada en la primera semana se puede representar en la siguiente tabla, en el que se indica el porcentaje de sanos que tiende a enfermar y el porcentaje de enfermos que tiende a sanar:

	sanos	*enfermos*
sanos	*0.8*	*0.6*
enfermos	*0.2*	*0.4*

El número de personas que padecerán la enfermedad tres semanas después está dada por el producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \end{pmatrix}$$

y es aproximadamente 30.

J. Una persona desea invertir 500,000 pesos que recibió como fondo de jubilación. Esta considerando dos instrumentos en los cuales invertir:
El A, con un rendimiento del 20% anual.
El B, con un rendimiento esperado del 10 al 40% anual.

Considerando que la inflación prevista para el año es del 18%.
¿Cuánto le aconsejaría Ud. invertir en cada tipo de instrumento?. ¿Porqué?.

R. Sean A y B las cantidades a invertir en los instrumentos A y B respectivamente.
Se tiene que A + B = 500000.
El rendimiento esperado de la cartera sería de 0.2A + 0.1B a 0.2A + 0.4B.
No estando determinado el sistema, hay la posibilidad de elegir y, para ello, señalar criterio y contexto.
El criterio es maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo. En cuanto al contexto, suponemos que la persona no tiene otra fuente de ingresos para vivir. Decidimos aconsejarle que su inversión, en el peor de los casos, le de al menos lo correspondiente a la inflación.
Se plantea entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A + B = 500000$$
$$0.02A - 0.08B= 0$$

Que se resuelve multiplicando la inversa de la matriz de coeficientes del sistema por el vector de términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 10 \\ 0.2 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El consejo es entonces invertir 400000 pesos en el instrumento A y 100000 pesos en el instrumento B.

¿Cuál sería el rendimiento esperado de esa cartera de inversiones?.

R. El rendimiento esperado es de 90000 a 120000 pesos anuales, es decir, del 18 al 24 por ciento anual respectivamente.

4. Portafolios del alumno.

Desarrollo: Al principio del curso el profesor explicará a los alumnos que deben conservar en una carpeta una serie de textos relacionados con el curso. La finalidad de hacerlo es ayudar al propio alumno a mejorar su trabajo a lo largo del curso. El portafolios es obligatorio y en caso de aprobar los exámenes parciales sus trabajos podrá tomarse en cuenta hasta para un 20% de la calificación final del curso. La carpeta o portafolios incluirá lo siguiente:

I. Revisión de exámenes.

Después de un examen el alumno reescribe cada una de las preguntas mal contestadas, las responde correctamente y escribe a continuación una explicación del error.
Después de presentar dos o más exámenes el alumno compara los resultados obtenidos, señala el tipo de preguntas que le son especialmente difíciles y la causa de ello así como las dificultades que ha superado y lo que le ha ayudado a lograrlo.

II. Revisión del trabajo individual:
Periódicamente el maestro invitará a los alumnos a responder por escrito ¿Cuánto tiempo dedicaste al estudio la semana anterior?. ¿Tienes un lugar específico para estudiar?, ¿Tienes todo el material que necesitas para estudiar?. ¿Ha habido cambios en tu forma de estudiar en relación con lo que hacías antes?. ¿Porqué?.

III. Revisión del trabajo en equipo.
Periódicamente el maestro invitará a un grupo a responder el siguiente cuestionario sobre cada uno de sus miembros:
1. Los comentarios del estudiante muestran que escucha a los demás. 2. Muestra interés en contribuir a la discusión o solución del problema que se está tratando. 3. Interactúa con todos los miembros del grupo. 4. Pide y proporciona información a los demás. 5. Cuestiona las afirmaciones incorrectas de sus compañeros en una forma provechosa para la tarea. 6. ¿Cuál es su aportación más valiosa al trabajo del grupo?.

IV. Revisión de trabajos.
El alumno guardará en la carpeta algunos trabajos que el considere particularmente valiosos. Estos trabajos pueden haber sido solicitados por el profesor o propuestos por el propio alumno.
Ejemplos de tales trabajos son los siguientes: notas de la clase dada por el alumno a un grupo de compañeros que tenían dificultades con un tema, investigación de la relación que hay entre un grafo y el polinomio característico de su matriz de adyacencia, información sobre las herramientas algebraicas empleadas en algún proyecto institucional de investigación, desarrollo de un procedimiento de computadora para la solución de problemas algebraicos rutinarios.
Otros ejemplos pueden ser algunos de los procedimientos de computadora que se encuentran en el capítulo de Ejercicios de Acción.
Cada trabajo deberá estar acompañado de un texto que responda a las siguientes preguntas.
¿Porque elegiste hacer este trabajo?. ¿Cuales fueron las principales dificultades que tuviste que vencer para realizarlo? ¿Que fue lo que te ayudó a superarlas?. ¿Cuales crees que son sus principales cualidades?.
A medida que haya varios trabajos, el profesor pedirá al alumno explicar: ¿Qué diferencias notas entre los trabajos que realizaste al

principio del curso y el de ahora?, ¿Que tipo de trabajos te agrada más hacer?. ¿Porqué?

V. Conclusión:
Al concluir el curso el profesor invitará a los alumnos a revisar los textos de su portafolios y, con base en ello, responder a la siguiente pregunta ¿Qué es lo que este curso te ha aportado de valioso para tu formación personal y profesional?.

Es conveniente que los alumnos propongan y discutan los criterios conforme a los cuales se deben evaluar los distintos elementos del portafolios.

Es recomendable que el profesor comente con cada alumno su portafolios al menos una vez antes de la revisión del final del curso.

APENDICE.

INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se ejemplificaron las distintas fases del Paradigma Pedagógico Ignaciano con ejercicios que se pueden utilizar en el salón de clases pero que no pretenden abarcar completamente ninguno de los temas del programa de estudios.

Los siete documentos de este apéndice tienen el propósito de servir para el estudio de los tres temas del programa dedicados a teoría de ecuaciones. Dichos documentos son: un examen para cada tema, una breve lección sobre cada tema y finalmente un examen que abarca el material de los tres temas.

El tipo de preguntas de los exámenes de tema puede servir también para diagnosticar la situación de los alumnos con respecto a los temas y contextualizar el aprendizaje.
Las lecciones breves están destinadas al estudio individual del alumno y tienen la finalidad de proporcionar información y favorecer la experimentación y la comprensión.
Los problemas incluidos en las lecciones pueden ser la base para la discusión grupal posterior, en la que se desarrollen las estrategias de solución de problemas así como las habilidades de demostrar y tomar decisiones con base en criterios y atendiendo al contexto
Los exámenes de unidad le permiten al alumno tomar conciencia de sus logros y deficiencias, de tal manera que los remedie oportunamente y pueda obtener una buena calificación en el examen de los tres temas.
Dependiendo del tiempo, la necesidad y el interés se pueden asignar ejercicios complementarios o trabajos para el portafolios del alumno, tales como el estudio de las matrices de Jordan o el significado de la derivada de una función de variable compleja.
Cada alumno debe incluir en su portafolios los exámenes de tema, indicar, en su caso, los errores cometidos, explicar la causa de los mismos y corregirlos.

DOCUMENTOS

1. Examen sobre números complejos.

1. ¿Para qué valor de x el polinomio x^2+2x+2 es igual a cero?.

2. Sean los números complejos $z_1=2+3i$ y $z_2=4-i$
   a)-¿Cuáles son la parte real y la parte imaginaria de z_1?
   b)-¿Cuáles son $Re(z_2)$ e $Im(z_2)$?
   c)-Escriba $\bar{z}_2$
   d)-Escriba el conjugado de z_1.
   e)-Efectúe las siguientes operaciones: z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \bullet z_2$ y z_1/z_2.
   f)-¿Cuál es la parte real de $(a+bi)^2$?.

3.

a)-Encuentre el número complejo z tal que $z\bullet(1-i) = 1$

b)-Encuentre un número complejo z tal que $z^2=2i$

c)-Encuentre el número complejo z tal que $z+(2+3i)= 4-2i$

4. Demuestre que si u y v son dos números complejos cualesquiera, entonces: $\overline{uv} = \bar{u}\,\bar{v}$

5. Represente geométricamente los siguientes números complejos:

a)- 2-3i

b)- (2+3i)+(2-2i)

c)- (2+3i)-(2-2i)

6. Considere el número complejo z=1-i

a)-¿Cuál es el módulo o valor absoluto de z?

b)-¿Cuál es el argumento o amplitud de z?

c)-¿Cuál es la interpretación geométrica de $|z|$?

d)-¿Cuál es la interpretación geométrica de arg(z)?.

e)-Escriba z en la forma polar o trigonométrica.

7.

a)-¿Cuántos radianes mide un ángulo de 30 grados?

b)-¿Cuántos grados mide un ángulo de $\pi/18$ radianes?

c)-¿Qué significa que un ángulo mida un grado?

d)-¿Qué significa que un ángulo mida un radián?.

8. Considere los números complejos $z_1=2\text{cis}30°$ y $z_2=8\text{cis}45°$

a)-Encuentre $z_1 \bullet z_2$

b)-Encuentre z_1/z_2

c)-Encuentre z_2/z_1

d)-Encuentre $(z_1)^5$

e)-Encuentre un número z tal que $z^3=z_2$.

9.

a)-Encuentre las raíces quintas de la unidad.

b)-Represente gráficamente las raíces quintas de la unidad.

b)-Diga cuáles de esas raíces quintas de la unidad son primitivas.

10.

a)-Encuentre las tres raíces cúbicas del número 64cis135°.

b)-Exprese una de esas raíces en la forma a+bi.

11. ¿Cuando son iguales los números complejos $r_1\text{cis}\theta_1$ y $r_2\text{cis}\theta_2$?.

12. Con base en la lectura de un texto explique la razón por la cual

$$e^{i\theta}+1=0\,.$$

13. Se quiere trazar un segmento de recta cuyo punto medio sea (5,4) y uno de cuyos extremos sea el punto (7,2). ¿Cuál es el otro extremo?.

14. Describa dos procedimientos para calcular $(2+3i)^8$. Diga cuál de los dos es mejor y porqué.

15. Explique dos diferencias entre los números reales y los números complejos.

2. Examen sobre polinomios.

1. Considere el siguiente polinomio en x:

$$x^4+2x^3-4x^2+3x+5$$

a)-¿Cuál es su grado?
b)-¿Cuántos términos tiene?
c)-¿Cuál es su coeficiente dominante?
d)-¿Cuál es el coeficiente del término de grado 3?
e)-¿Cuál es el coeficiente del término de grado cero?

2. Considere los dos siguientes polinomios en x:

$$f(x)=x^3-2x^2+x-2$$
$$g(x)=2x^2+3x-1$$

a)-Calcule f(x)+g(x)
b)-Calcule f(x)•g(x)
c)-Calcule f(x)-g(x)
d)-Encuentre dos polinomios q(x) y r(x) tales que f(x)=g(x)•q(x)+r(x) y el grado de r(x) es menor que el de g(x).
e)-Diga si el polinomio x-2 es un factor del polinomio f(x). ¿Porqué?.

3. Considere el siguiente polinomio en x:

$$f(x)=x^3-2x^2+3x-1$$

a)-¿Cuál es el valor del polinomio f(x) en x=3?
b)-Calcule f(a)
c)-Calcule f(-1)
d)-Si f(b)=0 ¿Cuál es el residuo de la división de f(x) entre x-b?
e)-Si x-c es un factor de f(x) ¿Qué podemos afirmar de f(c)?

4. Demuestre el Teorema del Residuo.

5. Efectúe las siguientes divisiones en forma sintética (empleando la Regla de Ruffini):

a)- $5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$ entre $x-1$

b)- x^4-2x^3+3x-1 entre $x+2$

6. Considere el siguiente polinomio en x:

$$f(x)=x^4+4x^3+5x^2+4x+4$$

a)-¿Es 0 una raíz de este polinomio? ¿Porqué?

b)-¿Es -2 una raíz de este polinomio? ¿Porqué?

c)- ¿Cuántas raíces tiene este polinomio? ¿Porqué?

d)-¿Es i una raíz de este polinomio? ¿Porqué?

e)-Descomponga f(x) en factores lineales.

f)-¿Cuál es la multiplicidad de cada una de las raíces de f(x)?.

g)-Represente las raíces de f(x) en el plano complejo.

7. ¿Cuántas raíces tiene el siguiente polinomio y porqué?

$$x^4+2x^3-x^2+2x+1$$

8. Considere el siguiente polinomio como una función cuyo dominio y cuyo codominio son los números reales:

$$f(x)=x^2-1$$

a)-Grafique la función para valores de x menores o iguales que 2 y mayores o iguales que -2.

b)-¿Cuál es la interpretación geométrica de las raíces de f(x)?

c)-¿Pertenece el punto (1,-1) a la gráfica de f(x)? ¿Porqué?

d)-¿Pertenece el punto (2,3) a la gráfica de f(x)? ¿Porqué?

e)-Calcule f(f(2)).

9. Con base en la lectura de un texto, encuentre el máximo común divisor de los polinomios:

$$f(x)= x^5+x^4-9x^3-x^2+20x-12 \quad y \quad g(x)=x^3-2x^2-5x+6$$

10. Encuentre una función polinomial cuya gráfica pase por los puntos (1,0), (2,0) y (3,0).

11. Considere el polinomio $f(x)=x^3+x2+x+1$. Calcule f(2.3) mediante dos procedimientos distintos. Diga cuál de los dos es mejor y porqué.

12. Un investigador mide la distancia recorrida por un objeto en caída libre y encuentra que el objeto recorre 19.64 metros en los primeros dos segundos, 44.19 metros en los primeros tres segundos y 78.56 metros en los primeros cuatro segundos. El investigador supone que la distancia recorrida por el objeto depende de los segundos transcurridos y está dada por un polinomio de segundo grado. ¿Cuál es ese polinomio?.

3. Examen sobre ecuaciones polinomiales.

1. Un polinomio mónico de octavo grado tiene las raíces: 1,2,3,4,5,6,7 y 8.
   a)-¿Cuál es el coeficiente de su término de séptimo grado?
   a)-¿Cuál es el coeficiente de su término de grado cero?

2. El polinomio $5x^3+bx^2+cx+40$ tiene las raíces 1 y 2. ¿Cuál es su otra raíz?.

3. Un polinomio f(x) con coeficientes reales tiene la raíz $2+3i$
   a)-¿Puede f(x) ser un polinomio de primer grado? ¿Porqué?
   b)-¿Cuál es otra de las raíces de f(x)? ¿Porqué?.

4. Los coeficientes del polinomio $f(x)=2x^3+bx^2+cx+9$ son números enteros. ¿Qué números racionales pueden ser raíces de f(x)?

5. Considere el polinomio $f(x)=9x^3-12x^2+x+2$
   a)-Describa dos estrategias distintas para encontrar las raíces de f(x)
   b)-Diga cuál de las dos estrategias es mejor y porqué
   c)-Encuentre las raíces de f(x) utilizando la estrategia elegida.

6. Sea f(x) un polinomio con coeficientes enteros. Demuestre que si a y b son números enteros y el número irracional $a+\sqrt{b}$ es una raíz de f(x), entonces también el número irracional $a-\sqrt{b}$ es una raíz de f(x).

7. Resuelva la ecuación $x^3-2x+4=0$ utilizando la fórmula de Cardano.

8. Resuelva la ecuación $x^4-8x^2+8x+15=0$ utilizando la fórmula de Ferrari.

9. Explique una diferencia importante entre los polinomios de grado menor o igual a cuatro y los demás polinomios.

10. Considere el polinomio $f(x)=x^4-x^3+x^2+x+1$.
    a)-¿Que posibilidades hay en cuánto al número de raíces positivas, negativas e imaginarias de este polinomio?.

b)-Calcule una cota superior y una cota inferior para las raíces reales de f(x).
c)-Haga una gráfica de f(x) en el intervalo que está entre dichas cotas.
d)-¿Cuáles son las raíces de f(x)?.

11. Considere el polinomio $f(x)=x^5+3x^4-4x^3-12x^2+4x+12$.
 a)-¿Que posibilidades hay en cuánto al número de raíces positivas, negativas e imaginarias de este polinomio?.
 b)-¿Hay una raíz real de f(x) en el intervalo entre x=1 y x=2?.
 c)-¿Hay una raíz real de f(x) en el intervalo entre x=-2 y x=-1?.
 d)-Diga cuántas raíces reales tiene f(x).

12. Diga si la siguiente afirmación es o no verdadera y porqué:
 Si f(x) es un polinomio con coeficientes reales y a y b son dos números reales distintos tales que f(a) y f(b) tienen el mismo signo, entonces no hay una raíz real de f(x) entre a y b.

13. El polinomio $f(x)= x^2-5$ tiene una raíz real entre x=2 y x= 3. Calcule dicha raíz:
 a)-Con dos iteraciones del método de la bisección.
 b)-Con dos iteraciones del método de Newton-Raphson.
 c)-¿Cuál de los dos resultados es mejor? ¿Porqué?.

14. Considere el polinomio $f(x)=x^4-2x^2+4x+1$. Con base en la lectura de un texto encuentre un polinomio g(x) cuyas raíces sean las mismas que las de f(x) pero elevadas al cuadrado.

15. Uno de los problemas más famosos de la antigüedad griega tiene que ver con la construcción del monumento para un rey. El monumento debería tener la forma de un cubo y el constructor había proyectado que cada lado midiera 100 pies. Sin embargo, recibió la orden de construir el monumento con el doble del volumen proyectado. ¿De qué tamaño tuvo que construir cada lado?.

16. Un empresario quiere envasar el refresco que produce en cubos de cartón. De hacerlo, el costo por cada unidad de refresco envasado sería de un décimo de centavo por centímetro cúbico de refresco, dos décimos de centavo por centímetro cuadrado de envase y veinte centavos de gastos fijos. ¿Cuánto debe medir el lado del cubo para que el costo por unidad sea igual a un peso?.

Se anexan los siguientes documentos:

4. Documento para el estudio del tema sobre números complejos.

5. Documento para el estudio del tema sobre polinomios.

6. Documento para el estudio del tema sobre ecuaciones polinomiales.

7. Examen sobre números complejos, polinomios y ecuaciones polinomiales.

CONCLUSIONES.

En los capítulos anteriores se hizo una descripción del Paradigma Pedagógico Ignaciano, se explicó el significado de cada una de sus fases en relación con la enseñanza del Algebra y finalmente se ejemplificaron esas fases con ejercicios que se pueden utilizar en los cursos introductorios de Algebra que se imparten en la Universidad Iberoamericana.

Este último capítulo quiere recoger algunas ideas de los capítulos anteriores en forma de sugerencias que pueden serles útiles a los profesores para una enseñanza del Algebra inspirada en el Paradigma Pedagógico Ignaciano.

1. La finalidad que persigue la educación de la Universidad Iberoamericana es formar personas que tomen decisiones profesionalmente competentes en el contexto mexicano con criterios evangélicos.

2. Cualquier curso del plan de estudios puede contribuir a este propósito formativo no sólo por su contenido sino también por un método de enseñanza que, en un clima de libertad, favorezca deliberadamente la experimentación, la comprensión, la reflexión y la acción, entendida esta última como un proceso de valoración para la toma de decisiones.

3. En especial, el estudio del Algebra puede ayudarle al estudiante a desarrollar hábitos de precisión, claridad y rigor, al mismo tiempo que le ofrece instrumentos útiles para entender la realidad e imaginar y valorar sus posibilidades de transformación.

4. Los objetivos próximos de la enseñanza del Algebra pueden definirse de una manera más concreta por medio de los exámenes y otros instrumentos de evaluación.

5. Los exámenes deben evaluar no sólo el dominio de las definiciones, procedimientos, operaciones y teoremas propios de la materia, sino que han de aquilatar también la capacidad del alumno para plantear y resolver problemas, aprender por medio de la lectura y tomar decisiones relacionadas con los temas del Algebra.

6. Es recomendable que los exámenes que evalúen un sólo tema tengan un carácter principalmente formativo y que sean los exámenes que abarcan dos o más temas los que cuenten para la acreditación y calificación del alumno. Los exámenes que evalúan un sólo tema deben tener un carácter más bien analítico, ser como una guía detallada para el estudio del tema, mientras que los que evalúan dos o más temas deben ser más bien sintéticos, en el sentido de relacionar entre sí lo más posible los temas tratados.

7. Con el fin de establecer un balance adecuado entre lo que el alumno debe poder hacer con la computadora y sin ella, puede pedírsele que

resuelva los exámenes de un sólo tema sin el auxilio de la computadora, mientras que en los que abarcan dos o más temas haga libre uso de la misma.

8. Otro elemento de evaluación que conviene emplear es el portafolios del alumno, cuya finalidad principal es ayudar al estudiante a reflexionar sobre su progreso en relación con la materia. El portafolios del alumno puede incluir cosas tales como la revisión de sus exámenes, una reflexión sobre sus hábitos de estudio, la revisión del desempeño de su trabajo en equipo y una selección de trabajos que el alumno considere valiosos. Aún cuando el portafolios tiene una finalidad principalmente formativa, puede asignársele un cierto peso para la calificación si el estudiante ha demostrado un suficiente dominio de la materia en los exámenes.
   La evaluación formativa se relaciona también con uno de los objetivos del aprendizaje de las Matemáticas: habituarnos a revisar los procedimientos y resultados de nuestro propio trabajo.

9. Para establecer desde el principio del curso las condiciones personales y grupales más favorables para el proceso de enseñanza aprendizaje es conveniente organizar actividades tales como presentaciones personales de los alumnos entre si y con el profesor, realizar exámenes que exploren los conocimientos previos de los estudiantes y permitan remediar oportunamente sus deficiencias, diagnósticos que permitan al estudiante organizar mejor su tiempo y optimizar su forma de estudiar, ejercicios que les permitan a los alumnos tener una idea más clara de los objetivos de la materia y de su importancia así como participar en el establecimiento de compromisos y normas relativas al curso.

10. Tanto por ofrecer un entorno favorable al aprendizaje como por corresponder a la forma en la que se practican hoy las Matemáticas, es recomendable introducir a los alumnos al uso de un sistema de Algebra Simbólica tal como "*Maple*" o "*Mathematica*".
    Por otra parte es aconsejable que los alumnos no estudien todos el mismo texto, sino que consulten libros escritos por distintos autores para que, al trabajar en equipo, se enriquezcan con sus diferentes puntos de vista.

11. Dada la variedad de estilos de aprendizaje de los estudiantes, no es conveniente reducirse a una sola forma social de enseñanza. Hay que usar oportunamente la enseñanza frontal, el trabajo en pequeños grupos y el diálogo conducido por el maestro. Hay que considerar también que una buena parte del aprendizaje se ha de realizar mediante actividades externas al salón de clases.

12. El maestro puede contribuir a la comprensión de los conceptos, procedimientos, teoremas y problemas propios del Algebra ayudando al alumno a explorar los datos de la experiencia relacionados con ellos, suscitando las preguntas y las imágenes pertinentes con respecto a esos datos y, una vez lograda la comprensión, requiriendo al estudiante la formulación y el uso de lo entendido.

13. Para facilitar la comprensión y memorización de operaciones y procedimientos conviene proporcionarle al alumno oportunidades frecuentes de practicar esas operaciones y procedimientos.

14. La comprensión de teoremas se puede facilitar ofreciéndole al alumno la oportunidad de descubrir el teorema como una generalización de casos particulares, por la exploración de una analogía o como la causa de un hecho y también invitándolo a ejemplificar el teorema en cuestión con casos particulares.

15. Se puede enseñar al alumno a resolver un cierto tipo de problema de tal manera que pueda resolver fácilmente los problemas similares que se le presenten. Tal aprendizaje es parecido al de los procedimientos y se facilita por medio de la práctica. Puede desarrollarse también la capacidad del estudiante de enfrentarse a problemas nuevos mediante la enseñanza de estrategias explícitas de solución de problemas y el uso de diferentes representaciónes de los conceptos.

16. Una vez entendido el enunciado de un teorema el profesor puede ayudar al alumno sea a entender la demostración del teorema, sea a efectuar la demostración del teorema sea a juzgar la corrección lógica de la demostración del teorema. El profesor puede ayudar al alumno también a tomar conciencia de las operaciones de experimentar, entender y juzgar mediante las cuales adquiere el conocimiento del Algebra.

17. Uno de los objetivos de la educación es desarrollar el hábito de tomar decisiones con base en criterios y atendiendo al contexto. El profesor puede contribuir al desarrollo de este hábito proponiendo a los alumnos problemas que requieran la generación de alternativas factibles para mejorar una situación y la elección de la mejor alternativa atendiendo a criterios propios del Algebra pero también a otros valores implicados en la situación.

18. El maestro puede propiciar la reflexión del alumno sobre las operaciones de experimentar, entender, juzgar y decidir mediante las cuales no sólo aprende sino que se transforma a si mismo y al

mundo que lo rodea. Esta reflexión invita naturalmente a cuestionar algunos de nuestros criterios y a preguntarse sobre el fundamento último al que apuntan esas operaciones, que es Dios.

BIBLIOGRAFIA

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev et. al. La matemática: su contenido, método y significado. Alianza Editorial. Madrid. 1973.

Alonso, Gallego y Honey. Los estilos de aprendizaje. Ediciones Mensajero. España, 1995.

Anton Howard. Introducción al Algebra Lineal. LIMUSA, Noriega Editores. México, 1996.

Aquino, Santo Tomás de. Somme Theologique. Editions du Cerf. Paris.,1959.

Asociación de Universidades confiadas a la Compañía de Jesús en America Latina (AUSJAL). Desafíos de America Latina y Propuestas Educativas . .SEUIA-ITESO. México, 1995.

Brunson y Ernst. Algebra, Trigonometry, & Mathematica Preface. Western Kentucky University Revisión de 1995.

Budnick, Frank S. Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales. McGraw Hill., México, 1994.

Comisión Internacional para el Apostolado de la Educación. (CIAE) Caracterísiticas de la Educación de la Compañía de Jesús. Obra Nacional de la Buena Prensa. México D.F., 1987.

Churchill, Ruel V. Complex variables and applications. McGraw-Hill Book Company Inc. USA.,1960.

Davis, , Porta y Uhl. Calculus & Mathematica: At the Tip of Calculus Reform.Ohio State University and University of Illinois at Urbana-Champaign.

Delegados de educación de las asistencias de la Compañía de Jesús en América Latina. (DEAL) Aportes para la implementación de la Pedagogía Ignaciana. Centro de Estudios Educativos A.C. México D.F.,1995.

Delgado F., Araceli. Docencia para una educación humanista. Universidad Iberoamericana. Centro de Didáctica. México,1995.

Dienes, Z. P. Las seis etapas del aprendizaje en Matemática. Editorial Teide. Barcelona. 1977.

Ellis,A.J. Basic Algebra and Geometry for Scientists and Engineers. John Wiley & Sons. Bath, Avon. 1982.

Florey, Francis G. Fundamentos de Algebra Lineal. Prentice Hall. México. 1980.

Fraleigh y Beauregard. Algebra Lineal. Addison-Wesley Iberoamericana. U:S:A:, 1989.

Fu, González, Lee. Robótica. McGraw Hill. México, 1994.

Garfunkel, Salomón y otros. For all practical purposes. W.H. Freeman & Co. New York. USA.,1994.

Gerber, Harvey. Algebra Lineal. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1992.

Good, Thomas L. y Brophy, Jere. Psicología Educativa Contemporánea. McGraw-Hill. México D.F., 1996.

Granfield, David. La experiencia interna del Derecho. UIA-ITESO. México, 1996.

Gray and Glynn. Exploring Mathematics with Mathematica. Addison Wesley Publishing Company. Redwood City, 1991.

Grossman, Stanley. Algebra Lineal con aplicaciones. Mc.Graw Hill. México, 1992.

Grossman, Stanley. Aplicaciones de Algebra Lineal. Mc.Graw Hill. México, 1992.

Heal, Hansen y Rickard. Maple V, Learning. Guide. Springer. Canada, 1996.

Hernández, Eugenio. Algebra y Geometría. Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid. E.U.A.,1994.

Hitoshi Kume. Herramientas Estadísitcas Básicas para el Mejoramiento de la Calidad. Grupo Editorial Norma. Colombia, 1994.

Hitt, Fernando E. Sistemas semióticos de representación. En "Avance y Perspectiva", Organo de Difusión del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México. Vol. 16. Mayo-junio de 1997.

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. Niveles de Bienestar en México. México, 1994.

Ishikawa Kaoru. ¿Qué es el Control Total de Calidad?. Grupo Editorial Norma.Colombia, 1992.

Kleiman. Matrices. Limusa. Noriega Editores. México. 1995.

Kostrikin, A. I. Introducción al Algebra. Editorial Mir. Moscú. 1983.

Kurosh, A. G. Curso de Algebra Superior. Editorial Mir, Moscú. 1977.

Lang, Serge. Introducción al Algebra Lineal. Addison-Wesley Iberoamericana. EUA.,1990.

Langford, Peter. El desarrollo del pensamiento conceptual en la escuela secundaria. Paidós. España. 1990.

Larson, Edwards. Introducción al Algebra Lineal. Limusa. Noriega Editores. México, 1995.

Leon, Steven J. Algebra Lineal con Aplicaciones. CECSA. México, 1993.

Lercaro, Cardenal Giacomo. Methods of Mental Prayer.Burns & Oates. London., 1957.

Lipschutz, Seymour. Algebra Lineal. McGraw-Hill. España, 1991.

Lonergan, Bernard. Inisght. Longmans, Green and Co. Glasgow, 1957.

Lonergan, Bernard. Understanding and Being. Morelli y Morelli. New York. 1980.

Loyola, San Ignacio de. Obras Completas. Biblioteca de Autores Cristianos. Madrid, 1952.

Maltsev, A. I. Fundamentos de Algebra Lineal. Siglo veintiuno editores. México, 1970.

Mathematical Archives. http://archives.math.utk.edu/

Martini, Cardenal Carlo Maria. Poner orden en la propia vida. San Pablo. Santa Fe de Bogotá, D. C. Colombia. 1995.

Marzano, Robert. Dimensiones del Aprendizaje. Iteso. Guadalajara. México. 1992.

Microsoft Corporation. Encarta 96 Encyclopedia.

Mizrahi and Sullivan. Mathematics for Business and Social Sciencies. John Wiley & Sons. USA., 1979.

Monagan, Geddes et al. Maple V, Programming Guide. Springer, Canada. 1996.

Noble y Daniel. Algebra Lineal Aplicada. Prentice Hall Hispanoamericana. México, 1989.

Orlich,Harder et. al. Técnicas de Enseñanza.Limusa. Noriega Editores. México, 1994.

Osborne, Jonathan. Beyond Constructivism. Misconceptions in Mathematics at undergraduate level. en The Proceedings of the Third International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Misconceptions Trust: Ithaca, NY (1993).

Pedagogía Ignaciana. Un planteamiento práctico. ICAJE..Instituto Cultural Tampico. Tampico,1995.

Peña, José A de la. Algebra Lineal Avanzada. Universidad Autónoma de México. Fondo de Cultura Económica. México.,1996.

Pita Ruiz, Claudio. Algebra Lineal. McGraw-Hill. México, 1993.

Polya, Georg. Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas, México, 1979.

Purcell y Varberg. Cálculo con Geometría Analística. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1993.

Redfern, Darren. Maple V, The Maple Handbook. Sringer, 1996.

Resnick, Lauren B. y Ford, Wendy W. La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Paidós. España. 1990.

Ruberu, Jathiratne. Misconceptions in Mathematics at undergraduate level. en The Proceedings of the Third International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Misconceptions Trust: Ithaca, NY (1993).

Sapir, Mark. V. Linear Algebra Web Notes. http.//www.math.unl.edu/msapir/cgi-bin/visit

Scientific American. Mathematics, an introduction to its spirit and use. W.H. Freeman and Company. San Francisco. 1979.

Schalk Ana E., Medrano Mayte, Urrea Paloma y González Dinorah. Descubre las Matemáticas con Nicolás. Tercer Grado. México, 1995.

Sestier, Andrés. Historia de las Matemáticas. Limusa Noriega Editores. México, 1996.

Smith, David Eugene. A source book in Mathematics. Dover Publications Inc., New York. 1959.

Sortais, Gaston. Traitè de Philosophie. P.Lethielleux, libraire-éditeur. Paris,1922.

Soto Prieto y Vicente Córdoba. Algebra Lineal con Matlab y Maple.Prentice Hall. España,1995.

Steen, Arthur et. al. Mathematics Today. Vintage Books. New York.,1980.

Stewart, Ian. Conceptos de Matemática Moderna. Alianza Universidad., Madrid, 1977.

Stewart, Ian. ¿Juega Dios a los dados?.Grijalvo Mondadori, Barcelona, 1991.

Strang, Gilbert. Algebra Lineal y sus Aplicaciones. Addison Wesley Iberoamericana. U.S.A..I986.

Swokowski y Cole. Algebra y Trigonometría. Grupo Editorial Iberoamérica. México,1996.

Szymansky. Matemáticas básicas para ingeniería electrónica. Addison-Wesley Iberoamericana. USA., 1994.

Taro Yamane. Estadística. Harla. México. 1979.

The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics. Van Nostrand Reinhold Company. New York, 1977.

Thompson y Yaqub. Introducción al Algebra Abstracta y Lineal. UTEHA, México. 1976.

Ulloa H. J.R. Temas de Algebra para estudiantes universitarios. (Manuscrito). Departamento de Matemáticas UIA. México D.F., 1988.